Geometria Superiore: Superfici di Riemann

CdL in Matematica Magistrale, Università dell'Insubria, a.a. 2010/11

Gli studenti per i quali il corso vale 6 crediti *possono* tralasciare di svolgere gli esercizi 4, 11, 15, 16.

Gli esercizi con $(*)$ non sono impossibili, spesso neanche difficili, ma richiedono un po' di ragionamenti non standard rispetto a quello che abbiamo fatto; quello che voglio è che ci pensiate e che cerchiate delle strade personali per dimostrarli.

1. Una superficie topologica Σ_g compatta orientabile di genere g si può rappresentare come lo spazio di identificazione di un $4g-$poligono piano regolare con i lati identificati come segue: chiamiamo i lati $a_1, b_1, \overline{a}_1, \overline{b}_1, \ldots, a_g, b_g, \overline{a}_g, \overline{b}_g$ e orientiamoli in modo che l'orientazione di quelli barrati sia opposta a quella di quelli senza barra. Ora identifichiamo gli a_i con gli $\overline{a}_i$ e i b_i con i $\overline{b}_i$, per ogni i, con le orientazioni fissate (si veda ad esempio il Kosniowski). Usate questa rappresentazione per verificare -scegliendo la triangolazione che più vi sembra opportuna- che la caratteristica di Eulero di Σ_g è $2-2g$.

2. Si consideri la funzione meromorfa su $\mathbb{P}^1$ (con coordinate $[z:w]$) localmente definita da $g(t) = (t^3-1)^2$, dove $t = z/w$ è la coordinata locale in $\mathcal{U}_w = \{w \neq 0\}$. Sia $G\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ la mappa olomorfa associata.

   (a) Trovare poli e zeri di g e loro ordini; scrivere $\mathrm{div} g \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1)$.

   (b) Trovare il grado di G, i suoi punti di ramificazione e i loro indici. Verificare la formula di Hurwitz.

   Stesse domande con la funzione $f(t) = 4t^2(t-1)^2/(2t-1)^2$.

3. Si consideri il luogo $X = Z(F)$ degli zeri del polinomio $F(x,y,z) = x^4 + y^4 + yz^3$ in $\mathbb{P}^2$.

   (a) Verificare che X è una curva liscia proiettiva. Qual'è il suo genere?

   (b) Considerare le proiezioni su $\mathbb{P}^1$

   $$\pi_x\colon [x:y:z] \mapsto [y:z]$$

   e

   $$\pi_y\colon [x:y:z] \mapsto [x:z];$$

   verificare che sono ben definite su X, trovare il loro grado e i punti di ramificazioni con i rispettivi indici di ramifiacazione. Verificare la formula di Hurwitz per queste mappe.

4. $(*)$ Per la SdR nell'esercizio precedente, la proiezione $\pi_z\colon [x:y:z] \mapsto [x:y]$ non è definita su $[0:0:1] \in X$. Verificare che esiste una estensione olomorfa di questa mappa a tutto X. Dove viene mandato il punto $[0:0:1]$? [sugg: pensare alla interpretazione geometrica di questa mappa].

5. (a) Dimostrare che X è una SdR compatta, non esiste una mappa olomorfa $F: X \to \mathbb{P}^1$ di grado $d > 1$ in $\mathbb{P}^1$ con un solo punto di ramificazione. (*) Questa affermazione vale ancora se al posto di $\mathbb{P}^1$ prendo una SdR compatta di genere ≥ 0?
   (b) Se X è una SdR compatta con una mappa olomorfa $F: X \to \mathbb{P}^1$ di grado $d > 1$ in $\mathbb{P}^1$ con *due* punti di ramificazione, allora i punti sono di ramificazione totale e $X \cong \mathbb{P}^1$. Fare un esempio di una tale mappa per ogni grado d.
   (c) Esiste una SdR di genere ≥ 0 con una mappa in $\mathbb{P}^1$ con esattamente tre punti di ramificazione? [Hurwitz dice che -con opportuni generi e gradi- *è possibile* avere tali mappe. Ma per rispondere alla domanda bisogna anche trovare almeno un esempio].

6. Sia X la curva proiettiva piana di grado 3 definita dall'equazione $y^2z - x^3 - xz^2$. Calcolare i divisori di intersezione $\mathrm{div}x$, $\mathrm{div}y$ e $\mathrm{div}z$ su X.

7. Sia X la conica proiettiva piana $X = Z(xy - z^2) \subset \mathbb{P}^2$. Se G è un polinomio lineare omogeneo $G(x, y, z) = ax + by + cz$, dare dei criteri, in termini dei coefficienti di G, affinchè $\mathrm{div}G$ sia della forma $2p$ per qualche $p \in X$. È possibile che per qualche G sia $\mathrm{div}G = 3p$ per qualche $p \in X$? (*) Se prendo un G generico nell'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}^2$ che tipo di divisore $\mathrm{div}G$ otterrò?

8. Sia X una curva proiettiva piana. Sia $\mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\}$ in $\mathbb{P}^2$ con coordinate affini $u = x_1/x_0$ e $v = x_2/x_0$.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{d}u$ e $\mathrm{d}v$ definiscono delle $1-$forme meromorfe su tutta X.
   (b) Calcolare $\mathrm{div}(\mathrm{d}u)$ nel caso in cui X sia la curva $Z(y^2z - x^3 - xz^2) \subset \mathbb{P}^2$; e calcolare il grado di questo divisore.

9. Sia Z una curva iperellittica con mappa iperellittica $\pi: Z \to \mathbb{P}^1$. Calcolare il divisore di ramificazione $R_\pi \in \mathrm{Div}(Z)$ e il divisore di diramazione $B_\pi \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1)$, e verificare che

$$\pi^* B_\pi = 2R_\pi. \tag{1}$$

   Dimostrare la relazione (1) per qualsiasi mappa di grado due tra SdR compatte $\pi: X \to Y$.

10. Si considerino le seguenti mappe olomorfe da $\mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^2$.
   (a) $\alpha([x : y]) = [x^2 : xy : y^2]$;
   (b) $\beta([x : y]) = [x^4 : x^2y^2 : y^4]$;
   (c) $\gamma([x : y]) = [x^3 : xy^2 : y^3]$.

   Stabilire:
   - Il sistema lineare associato, precisando quindi anche il suo grado, e se è completo o meno.
   - Quali tra queste mappe sono immersioni olomorfe?
   - Per quali mappe l'immagine è una superficie di Riemann?

- Per le mappe che verificano il punto precedente, stabilire il grado della mappa sull'immagine e il grado dell'immagine in $\mathbb{P}^2$, e metterli in relazione con il grado del sistema lineare.

11. $(*)$ Sia X la curva piana proiettiva definita dall'equazione $y^2z = x^3 - xz^2$ in $\mathbb{P}^2$. Siano $p_0 = [0 : 1 : 0]$, $p_1 = [0 : 0 : 1]$, $p_2 = [1 : 0 : 1]$, $p_3 = [-1 : 0 : 1]$. Mostrare le seguenti equivalenze lineari su X:
    (a) $2p_0 \sim 2p_i$ per ogni i;
    (b) $p_1 + p_2 + p_3 \sim 3p_0$.

12. Sia X una SdR compatta di genere $g \geq 2$. Sia K un suo divisore canonico. Studiare i sistemi lineari completi $|K - p|$ $|K + p|$, $|K + 2p|$, $|K + 3p|$, con $p \in X$. In particolare stabilire
    (a) Se e quando hanno punti base;
    (b) In quali casi inducono immersioni olomorfe.

13. Sia X una SdR compatta e p un suo punto qualsiasi. Discutere le seguenti affermazioni
    (a) Esiste una $1-$forma meromorfa ω con un polo semplice in p e nessun altro polo;
    (b) Esiste una $1-$forma meromorfa ω con un polo doppio in p e nessun altro polo;
    (c) per ogni $n > 1$ esiste una $1-$forma meromorfa ω con un polo di ordine n in p e nessun altro polo.

14. Se $X \subset \mathbb{P}^n$ è una curva liscia proiettiva non-degenere, dimostrare che $\deg X \geq n$. Trovare un esempio in cui valga l'uguaglianza per ogni n.

15. Sia X una SdR compatta non-iperellittica di genere $g \geq 3$ che ammette una mappa di grado 4 in $\mathbb{P}^1$.
    (a) Dimostrare che allora nella sua immagine canonica in $\mathbb{P}^{g-1}$ esistono 4 punti p_0, p_1, p_2, p_3 non linearmente indipendenti.
    (b) $(*)$ Vale il viceversa?
    (c) Di che dimensione è $\text{span}\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$?

    In generale cosa possiamo dire di analogo per una SdR comapatta non-iperellittica che ammette una mappa di grado $d < g$ su $\mathbb{P}^1$?

16. $(*)$ Esiste una funzione $d(g)$ del genere g tale che per ogni SdR di genere g esiste una mappa di grado minore o uguale a d da X in $\mathbb{P}^1$?