Geometria Superiore: Superfici di Riemann

Lidia Stoppino

CdL in Matematica Magistrale, Università dell'Insubria, a.a. 2014/15

Esercizi novembre 2014

1. Sia $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un reticolo complesso, e sia $\Lambda' \subseteq \Lambda$ un suo sottoreticolo.
   (a) Dimostrare che il quoziente Λ/Λ' è un gruppo (abeliano) finito.
   (b) Sia $p\colon \mathbb{C}/\Lambda' \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ la mappa olomorfa di tori complessi associata. Dimostrare che il grado di p è la cardinalità di Λ/Λ'.
   (c) Dimostrare direttamante (senza usare la formula di Hurwitz) che questa mappa non ha punti di ramificazione.

   Provare a dimostrare che *ogni* mappa olomorfa tra tori complessi $F\colon \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ (dove Λ e Γ sono due reticoli)è indotta da una mappa $\mathbb{C}$ lineare $G\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ della forma $G(z) = \gamma z + \delta$, dove $\gamma\Lambda \subseteq \Gamma$. Provare altresì che il grado di F è la cardinalità di $\Gamma/\gamma\Lambda$.

2. Esercizio II.4.H del Miranda.

3. Si consideri la curva proiettiva liscia $X := Z(F) \subset \mathbb{P}^2$, dove
$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0x_1 + x_1^2 + x_2^2.$$
   Si consideri la funzione meromorfa h su X definita da x_1/x_2. Sia H la mappa olomorfa associata $H\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^1$.
   (a) Si scriva esplicitamente (in opportune coordinate) la mappa H come quoziente di funzioni olomorfe (in particolare fate attenzione all'intorno di $P = [1 : 0 : 0]$).
   (b) Si calcolino i poli e gli zeri di h e i loro ordini.
   (c) Si calcolino i punti di ramificazione di H e le loro molteplicità e si verifichi la formula di Hurwitz.

4. Miranda Esercizio II.4.J (*Curva di Fermat di grado d*).

5. (a) Dimostrare che X è una SdR compatta, non esiste una mappa olomorfa $F\colon X \to \mathbb{P}^1$ di grado $d > 1$ in $\mathbb{P}^1$ con un solo punto di ramificazione. $(*)$ Questa affermazione vale ancora se al posto di $\mathbb{P}^1$ prendo una SdR compatta di genere ≥ 0?
   (b) Se X è una SdR compatta con una mappa olomorfa $F\colon X \to \mathbb{P}^1$ di grado $d > 1$ in $\mathbb{P}^1$ con *due* punti di ramificazione, allora i punti sono di ramificazione totale e $X \cong \mathbb{P}^1$. Fare un esempio di una tale mappa per ogni grado d.
   (c) Esiste una SdR di genere ≥ 0 con una mappa in $\mathbb{P}^1$ con esattamente tre punti di ramificazione? [Hurwitz dice che -con opportuni generi e gradi- *è possibile* avere tali mappe. Ma per rispondere alla domanda bisogna anche trovare almeno un esempio].