Geometria Superiore: Superfici di Riemann

Lidia Stoppino

CdL in Matematica Magistrale, Università dell'Insubria, a.a. 2014/15

Esercizi ottobre 2014

1. Dimostrare le seguenti affermazioni.

   (a) Sia $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ polinomio omogeneo. Se F ammette una scomposizione
   $$F = GH, \text{ con } G, H \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n],$$
   allora G ed H sono omogenei.

   (b) Sia $f \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ di grado d, definiamo
   $$F(x_0, x_1, \dots, x_n) := x_0^d f(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0).$$
   Verificare che F è un polinomio omogeneo di grado d. Verificare inoltre che f è irriducibile se e solo se F lo è.

2. Dimostrare le seguenti affermazioni sulle curve nello spazio proiettivo.

   (a) Due rette (curve di grado 1) si intersecano in uno e un solo punto;

   (b) Una retta e una curva $Z(F)$ di grado d si incontrano in k punti, dove $1 \leq k \leq d$;

   (c) Sia F è un polinomio omogeneo irriducibile di grado d e $p \notin Z(F)$. Allora le rette per p che intersecano $Z(F)$ in meno di d punti sono un insieme finito.

   Discutere quali di queste affermazioni sono vere per le curve affini.

3. Dimostrare che se due curve lisce proiettive $Z(F), Z(G) \subset \mathbb{P}^2$ hanno un numero infinito di punti in comune allora coincidono. Una possibile strategia è la seguente:

   (a) Sia $S := Z(F) \cap Z(G)$. Osservare che per la compattezza di $\mathbb{P}^2$ esiste almeno un punto di accumulazione $p \in S$.

   (b) Usare delle carte locali nell'intorno di p e il principio di identità delle funzioni analitiche (delle serie di potenze sugli appunti di Guarneri).

   Cosa si può dire della stessa affermazione per le curve affini?

4. Sia C la curva affine in $\mathbb{C}^2$ data dagli zeri del polinomio
   $$f(x, y) = 2x^3y^2 - x^4y - x^3 + 2x^2y + 4xy^2 - 8y^3.$$

   (a) Scrivere l'equazione della sua proiettivizzata $Z(F)$ in $\mathbb{P}^2$.

   (b) Trovare i punti singolari di $Z(F)$.

   (c) La curva $Z(F)$ è irriducibile? Se no, trovarne le componenti irriducibili.