L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2013/2014

Primi esercizi sulle topologie

1. Elencare tutte le topologie possibili su un insieme di cardinalità 1, 2 e 3.

2. Si consideri un insieme composto da 4 elementi $X = \{a, b, c, d\}$. Si stabilisca quali di queste famiglie sono delle topologie su X:

   (a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}\}$;
   (b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$;
   (c) $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$;
   (d) $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}, \{c\}\}$;
   (e) $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;
   (f) $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$;
   (g) $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

   Per quelle che non sono topologie, si trovi la topologia generata dalla famiglia.

3. Consideriamo un insieme di quattro elementi $X = \{a, b, c, d\}$.

   (a) Quali sono le topologie metrizzabili su X?
   (b) Si considerino le famiglie di sottoinsiemi di X:

   $$\mathcal{B}_1 := \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\},$$

   $$\mathcal{B}_2 := \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{d\}\},$$

   $$\mathcal{B}_3 := \{\{d\}, \{d, b\}, \{a, c\}\}.$$

   Quali tra queste sono una base per una topologia su X? Per quelle che lo sono, scrivere la topologia che inducono.

4. Consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi dei numeri naturali $\mathbb{N}$:

   $$\mathcal{T} := \{\{t \in \mathbb{N} \mid t \leq n\}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}, \emptyset\}.$$

   (a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{N}$.
   (b) Lo spazio $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ è metrizzabile?
   (c) Sia $E \subset \mathbb{N}$ il sottoinsieme $E = \{4, 8\}$. Trovarne la chiusura, la parte interna e i punti di accumulazione.
   (d) Dimostrare che un sottoinsieme Y di $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ è denso se e solo se $0 \in Y$.

5. Sia X uno spazio topologico, siano $Z, W \subset X$ due sottoinsiemi. Indichiamo con $Fr(A)$ l'insieme dei punt di frontiera di un insieme $A \subset X$. Dimostrare

   (a) $Fr(Z \cup W) \subseteq Fr(Z) \cup Fr(W)$.

(b) Dimostrare con un esempio che l'inclusione del punto precedente può essere stretta.

6. Si consideri l'insieme $X := \{a, b, c, d, e\}$. Sia $\mathcal{T}$ la topologia generata dalla famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{F} := \{\{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e\}\}$.
   (a) Descrivere esplicitamente la topologia $\mathcal{T}$.
   (b) La famiglia $\mathcal{F}$ è una base per questa topologia? Esibire una base per la topologia.
   (c) Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è connesso?
   (d) Trovare chiusura, parte interna e punti di accumulazione per gli insiemi $S := \{a, b, c, e\}$ e $T := \{a, b, d, e\}$.

7. Dimostrare che
   (a) La famiglia $\{(a, b), a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ è una base per la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$ su $\mathbb{R}$.
   (b) La famiglia $\{[a, b), a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ non è una base per la topologia di Sorgenfrey $\mathcal{T}_S$ su $\mathbb{R}$.

8. Ricordiamo che la topologia cofinita $\mathcal{K}$ su un insieme qualsiasi $X \neq \emptyset$ è la topologia i cui aperti sono X, $\emptyset$, e i complementari di insiemi finiti di punti.
   (a) Verificare che $\mathcal{K}$ è una topologia.
   (b) Dimostrare che se X è un insieme finito allora la topologia cofinita su X coincide con la topologia discreta.
   (c) Dimostrare che la topologia cofinita su uno spazio infinito non è mai metrizzabile.
   (d) Consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita $\mathcal{K}$, e l'insieme dei naturali $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. L'insieme $\mathbb{N}$ è aperto? Trovare la sua parte interna. È denso?

9. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, dotato della topologia euclidea.
   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$;
   (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$;
   (c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Z}\}$;
   (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{N}\}$.

   Stabilire - giustificando la risposta - quali sono chiusi, e quali sono densi.

10. Sia X un insieme con 4 elementi: $X = \{a, b, c, d\}$. Sia $\mathcal{T}$ la seguente collezione di sottonisiemi:
$$\mathcal{T} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{c\}, X, \emptyset\}$$
   (a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X. È metrizzabile?
   (b) Trovare la chiusura, la parte interna e i punti di accumulazione di $E_1 = \{d\}$, $E_2 = \{a, d\}$, $E_3 = \{a\}$.

   (a) Dimostrare che uno spazio topologico discreto è sempre metrizzabile.
   (b) Dimostrare che se X è uno spazio topologico finito metrizzabile allora la topologia è quella discreta.

11. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

    (a) In uno spazio topologico arbitrario ogni sottoinsieme coincide con la parte interna della sua chiusura.

    (b) In uno spazio topologico arbitrario ogni aperto coincide con la parte interna della sua chiusura.

    (c) In uno spazio topologico arbitrario ogni aperto è contenuto nella parte interna della sua chiusura.

    (d) Uno spazio topologico è dotato della topologia discreta se e solo se ogni suo sottoinsieme coincide con la parte interna della sua chiusura.

12. Sia X uno spazio topologico e sia $S \subseteq X$ un suo sottoinsieme.

    (a) Definire un punto di accumulazione per S.

    (b) Dimostrare che S è chiuso (cioè è il complementare di un aperto) se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.