

Geometria I- Diario delle lezioni

L. Stoppino, Università dell'Insubria, a.a. 2014/2015

Qui ci sono gli argomenti delle lezioni e delle esercitazioni svolte da me, non delle esercitazioni svolte dagli esercitatori.

Martedì 30 settembre (2 ore).

Introduzione del corso. Spazi metrici: Definizione ed esempi (metrica euclidea su \mathbb{R}^n , metrica discreta), applicazioni continue tra spazi metrici. Aperti negli spazi metrici e loro proprietà. Teorema: una funzione tra due spazi metrici è continua se e solo se la controimmagine di aperti è aperta.

Mercoledì 1 ottobre (2 ore):

Definizione di spazio topologico. Primi esempi: 1) topologie metrizzabili; 2) topologia discreta (verifica che è indotta dalla metrica discreta); 3) Topologia concreta; 4) Topologia della semicontinuità inferiore su \mathbb{R} ; 5) Topologia cofinita. Esercizi: la topologia concreta su un insieme con più di due elementi non è metrizzabile; la topologia cofinita su un insieme infinito non è metrizzabile; la topologia della semicontinuità superiore su \mathbb{R} non è metrizzabile. Topologie su insiemi finiti con pochi elementi. Topologie confrontabili, più o meno fini.

Giovedì 2 ottobre (2 ore)

Esercizi sugli spazi metrici e sugli spazi topologici.

Martedì 7 ottobre (2 ore).

I chiusi e le loro proprietà.

L'intersezione arbitraria di topologie è una topologia. Topologie generate da una famiglia di sottoinsiemi. Esempi. *Base* di una topologia. Esempi (bolle aperte per uno spazio metrico, i singoletti sono una base per la topologia discreta);

Mercoledì 8 ottobre (2 ore). Teorema della base (quando una famiglia di aperti può essere base di una topologia: Teorema 3.7 del Manetti). Esempio importante: retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$. Verifica che la topologia \mathcal{T}_s è strettamente più fine di quella euclidea \mathcal{T}_e e strettamente meno fine di quella discreta \mathcal{D} .

Classificazione di punti rispetto a sottoinsiemi: sia S sottoinsieme di uno spazio topologico X . Parte interna S° , chiusura \overline{S} , frontiera di un sottoinsieme S di uno spazio topologico X . Definizioni ed esempi. Punti interni, esterni ad S e punti di frontiera. Loro proprietà. Esercizi: $X \setminus (X \setminus S)^\circ = \overline{S}$; S è aperto se e solo se $S^\circ = S$, S è chiuso se e solo se $\overline{S} = S$.

Comportamento di chiusura e parte interna rispetto a intersezione e unione, e controesempi.

Giovedì 9 ottobre (2 ore).

Esercizi (Berti)

Martedì 14 ottobre (2 ore):

Definizione di sottospazio denso. Proprietà ed esempi. Esercizi: \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} con la topologia euclidea; in uno spazio X con la topologia discreta solo X stesso è denso; in uno spazio con la topologia concreta tutti i sottoinsiemi non vuoti sono densi; in uno spazio con la topologia cofinita i sottoinsiemi densi sono tutti e soli i sottoinsiemi di cardinalità infinita.

Definizione di intorno di un punto e di sistema fondamentale di intorni. Esempi.

Mercoledì 15 ottobre (2 ore):

Continuità negli spazi topologici. Definizione, esempi e prime proprietà. Definizione locale con gli intorni. Definizione con i chiusi. Esempi.

Definizione di omeomorfismo. Verifica che dà una relazione di equivalenza.

Definizione di applicazioni aperte e chiuse.

Esercizi: i) le funzioni continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la topologia della semicontinuità inferiore \mathcal{T}_- in dominio e codominio sono tutte e sole le funzioni monotone strettamente crescenti continue a destra (con la metrica euclidea) in ogni punto. ii) Le funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_-)$ sono le funzioni f tali che per ogni $x \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\forall y \in (x - \epsilon, x + \epsilon) f(y) \leq f(x) + \epsilon$.

Prop: f continua se e solo se $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$ per ogni sottoinsieme S del dominio.

Giovedì 16 ottobre: esercizi (2 ore– Berti).

Martedì 21 ottobre (2 ore– Monti).

Topologia indotta o topologia del sottospazio. Verifica che è la più piccola topologia che rende continua l'inclusione.

Verifica che chiusura e parte interna commutano con l'inclusione. Sottospazi discreti: definizione ed esempi.

L'inclusione di un sottospazio S in uno spazio topologico X è aperta (risp. chiusa) se e solo se S è aperto (risp. chiusa).

Definizione di immersione. Sia f un'applicazione continua. Se f è chiusa/aperta ed iniettiva, allora f è una immersione chiusa/aperta. Esercizio 3.39 del Manetti.

Mercoledì 22 ottobre (2 ore– Monti).

Spazi di Hausdorff o T2. Metrizzabile \Rightarrow Hausdorff. Negli spazi di Hausdorff gli insiemi finiti di punti sono chiusi. Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.

Altre proprietà di separazione: T0, T1 (notazioni del Manetti che sono diverse da quelle del Kosniowski!).

Giovedì 23 ottobre: esercizi (2 ore– Berti).

Martedì 28 ottobre (2 ore– Monti).

Topologia prodotto: la meno fine che rende continue le proiezioni. Base canonica.

Esempio: la topologia prodotto su \mathbb{R}^2 indotta dalla topologia euclidea sulle due componenti è la topologia euclidea.

Teorema: Le proiezioni sono applicazioni aperte (ma non sempre chiuse). Inoltre per ogni $x \in X$ la fibra $p^{-1}(x)$ è omeomorfa a Y .

Teorema: uno spazio topologico X è T2 se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto $X \times X$.

Giovedì 30 ottobre: esercizi (2 ore– Berti).

Martedì 4 novembre (2 ore).

Lemma: se f è un'applicazione continua biettiva e aperta/chiusa allora è un omeomorfismo.

Esercizio: classificazione degli intervalli di \mathbb{R} a meno di omeomorfismo: cominciamo a porre la questione, e a vedere che $(a, b) \sim (0, 1)$ per ogni $a < b$ (anche $a = -\infty$ e/o $b = +\infty$). Come fare con gli altri casi?

Definizione di *proprietà topologica*: una proprietà che dipende solo dalla classe di omeomorfismo di uno spazio topologico. Esempi: 1) essere metrizzabile è una proprietà topologica; 2) essere limitato rispetto a una metrica *non* lo è. 3) Essere T0, T1, T2 sono proprietà topologiche.

Connessione. Definizione e definizioni equivalenti. Esempio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è sconnesso. Lemma: A aperto e chiuso di uno spazio topologico X . Se $Y \subseteq X$ è un sottospazio connesso, allora $Y \subseteq A$ oppure $Y \subseteq X \setminus A$.

Teorema: L'intervallo $[0, 1]$ è connesso con la topologia euclidea.

Mercoledì 5 novembre (2 ore).

Teorema: L'immagine continua di un connesso è connessa. (Corollario: la connessione è una proprietà topologica).

Definizione di connessione per archi (cpa). Verifica che cpa \Rightarrow connesso, ma non vale il viceversa (esempio della pulce e il pettine).

Esercizio: sia $Y \subseteq X$ sottospazio connesso di uno spazio topologico. Se $W \subseteq X$ è tale che $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$, allora W è connesso. In particolare la chiusura di un sottospazio connesso è connessa.

Definizione di sottospazi convessi di \mathbb{R}^n . Osservazione: non è una proprietà topologica ma è utile perché convesso \Rightarrow connesso.

Teorema: per un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ sono equivalenti le seguenti proprietà: S è convesso (cioè è un intervallo); S è connesso; S è connesso per archi.

Applicazioni: $\mathbb{R} \not\sim \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $[0, 1] \not\sim [0, 1)$; $[0, 1] \not\sim (0, 1)$.

Teorema: $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora esiste $x \in S^n$ tale che $f(x) = f(-x)$. Corollario: gli aperti di \mathbb{R} non sono omeomorfi agli aperti di \mathbb{R}^n .

Teorema $f: X \rightarrow Y$ continua e suriettiva, Y connesso, per ogni $y \in Y$ $f^{-1}(y)$ sia connesso, e f sia aperta oppure chiusa. Allora X è connesso. Corollario: il prodotto di spazi connessi è connesso.

Giovedì 6 novembre (2 ore- esercitazione).

Esercizi svolti:

- Sia X uno spazio topologico e $S \subseteq X$ un sottospazio. Si dimostri che per ogni sottoinsieme $T \subseteq S$, la chiusura di T in S è l'intersezione della chiusura di T in X con S .
- Sia $f: X \rightarrow Y$ funzione continua con Y spazio di Hausdorff. Dimostrare che il grafico

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

è chiuso.

- Siano $f, g: X \rightarrow Y$ applicazione continue con Y spazio di Hausdorff. Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso di X tale che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A$. Dimostrare che allora $f \equiv g$ su tutto X .
- Si consideri \mathbb{R}^2 con la topologia prodotto indotta dalla topologia \mathcal{T}_S della retta di Sorgenfrey su entrambi i fattori. Si dimostri che l'insieme

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

è discreto.

- Quali sono i sottospazi connessi di uno spazio con topologia discreta.
- Il prodotto di spazi connessi per archi è connesso per archi.
- Dimostrare che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta da quella euclidea non è connesso.
- Dimostrare che X spazio topologico è connesso se e solo se ogni funzione continua da X in uno spazio discreto è costante.
- Se $A, B \subseteq X$ sono due sottospazi connessi di uno spazio topologico X , se $A \cap B \neq \emptyset$, allora $A \cup B$ è connesso.
- Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio connesso di uno spazio topologico X . Sia W un sottospazio di X tale che

$$y \subseteq W \subseteq \bar{Y}.$$

Dimostrare che W è connesso.

Martedì 11 novembre (2 ore).

Lemmi: 1) Se $A, B \subseteq X$ sono connessi e $A \cap B \neq \emptyset$, allora $A \cup B$ è connesso. 2) Se $\{Z_i\}$ è una famiglia di connessi tali che esiste un $x \in Z_i$ per ogni i , allora la loro unione è connessa.

Definizione di componente connessa. Proprietà: 1) ogni componente connessa è chiusa. 2) Se ogni punto di X possiede un intorno connesso allora sono anche aperte. 3) Le componenti connesse formano una partizione di X . 4) Il numero di componenti connesse è un invariante topologico.

Esempi: Le componenti connesse di uno spazio discreto sono i punti. Le componenti connesse di \mathbb{Q} con la topologia euclidea sono i punti: sono chiusi ma non aperti.

Ricoprimenti. Definizioni ed esempi. Ricoprimenti aperti.

Definizione di spazi compatti. Esempi: \mathbb{R}^n non è compatto. Uno spazio finito è sempre compatto. Uno spazio discreto è compatto se e solo se è finito. Uno spazio con la topologia concreta è sempre compatto.

Teorema: immagine tramite funzione continua di un compatto è compatta. Corollario: la compattezza è una proprietà topologica.

Teorema: $[0, 1]$ è compatto.

Mercoledì 12 novembre (Berti- 2 ore esercitazione).

Giovedì 13 novembre (2 ore).

Proposizione: chiuso in un compatto è compatto. Unione finita di compatti è compatta. Teo: Compatto in $T_2 \Rightarrow$ è chiuso.

Teorema di Heine-Borel: un sottospazio di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Corollario: ogni funzione continua da un compatto ad \mathbb{R} ammette massimo e minimo.

Teorema: il prodotto finito di compatti è compatto.

Cenni al prodotto finito e al teorema corrispondente (Tychonoff).

Teorema: Una funzione continua da un compatto a un T_2 è chiusa.

Martedì 18 novembre (2 ore).

Quozienti topologici. Definizione di topologia quoziente: topologia $f_*\mathcal{T}_X$ indotta da una mappa suriettiva $f: X \rightarrow Y$. Definizione di identificazione (Manetti)

Primi esempi. Esercizi: (1) Sia $f: [0, 1] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ la mappa $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Allora $f_*\mathcal{T}_{e|[0,1]} = \mathcal{T}_{e|S^1}$ (in altre parole il quoziente di $[0, 1]$ rispetto a questa applicazione f è S^1 con la topologia euclidea). (2) Se invece prendo $\eta = f|_{[0,1]}$ la restrizione della stessa mappa a $[0, 1]$ allora η è ancora continua e suriettiva da $([0, 1], \mathcal{T}_{e|[0,1]})$ a $(S^1, \mathcal{T}_{e|S^1})$, ma la topologia quoziente su S^1 indotta da η è strettamente più fine di quella euclidea: $\mathcal{T}_{e|S^1} \subsetneq f_*\mathcal{T}_{e|[0,1]}$.

Proposizione: se $f: X \rightarrow Y$ è una mappa tra spazi topologici continua suriettiva e aperta/chiusa, allora Y ha la topologia quoziente.

Teorema (proprietà fondamentale della topologia quoziente, referenza Manetti Lemma 5.5): Sia X uno spazio topologico e $f: X \rightarrow Y$ una applicazione suriettiva tale che Y ha la topologia quoziente rispetto ad f (cioè una identificazione). Sia $g: X \rightarrow Z$ una applicazione continua. Esiste un'unica applicazione continua $\bar{g}: Y \rightarrow Z$ tale che $\bar{g} \circ f = g$ se e solo se g è costante sulle fibre di f .

Osservazioni insiemistiche: Dati due insiemi X e Y , e una applicazione suriettiva $f: X \rightarrow Y$, possiamo definire una relazione di equivalenza su X : $x \sim_f y$ se e solo se $f(x) = f(y)$. Questa relazione è tale che X/\sim è in corrispondenza biunivoca con Y . Verifica che se f è un'identificazione allora Y è omeomorfo a X/\sim (dove su quest'ultimo insieme prendo la topologia quoziente).

Giovedì 20 novembre (Esercitazione- Berti 2 ore).

Martedì 25 novembre (Monti- 2 ore).

Definizione di contrazione di un sottoinsieme $S \subseteq X$ ad un punto X/S . Esempio: il disco chiuso con il bordo contratto è omeomorfo a una sfera S^2 .

Richiamo: azioni di gruppo su un insieme. Definizione di azioni topologiche.

Prop: La proiezione sull'insieme delle orbite è aperta e se il gruppo è finito è anche chiusa.

Mercoledì 26 novembre (Esercitazione -Berti 2 ore).

Martedì 2 dicembre (2 ore).

Prop: se X è di Hausdorff su cui agisce un gruppo finito allora lo spazio delle orbite è Hausdorff.

Esempi- esercizi su contrazioni: (i) $\mathbb{R}/(0,1)$ non è T_2 nè T_1 . (ii) Sia X T_2 , e sia $K \subset X$ compatto. Allora X/K è T_2 . (iii) Una mappa di contrazione a un punto $X \rightarrow X/S$ è aperta/chiusa se e solo se S è aperto/chiuso in X . (iv) Esercizio 5.7 del Manetti.

Esempio importante: Considerato \mathbb{Z} che agisce per traslazione su \mathbb{R} , vale che $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim S^1$.

Superfici di rotazione, e in genere figure ottenute per rotazione di figure piane in \mathbb{R}^3 . Verifica che se $F \subseteq \{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$ è una figura piana che non interseca l'asse z allora il solido di rotazione che ottengo ruotandolo intorno all'asse z è omeomorfo a $F \times S^1$.

Toro descritto come identificazione dei bordi del quadrato.

Mercoledì 3 dicembre (2 ore).

Assiomi di numerabilità per spazi topologici. Definizione di spazio 2-numerabile. Esempi. Definizione di spazio separabile.

Lemma 1: ogni spazio 2-numerabile è separabile. Lemma 2: uno spazio metrizzabile separabile è 2-numerabile.

Definizione di spazio 1-numerabile. Osservazioni: 2-numerabile \Rightarrow 1-numerabile. Gli spazi metrici sono 1-numerabili.

Esempio importante: La retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ è 1-numerabile, separabile ma non è 2-numerabile. Dunque per il Lemma 2 non è metrizzabile.

Definizione di successione in uno spazio topologico. Definizione di punto di accumulazione per una successione e per un sottoinsieme, e confronto tra le due nozioni. Definizione di sottosuccessione. Lemma: se una successione ammette una sottosuccessione convergente a p , allora p è un punto di accumulazione per la successione.

Proposizione: sia X spazio 1-numerabile. $S \subseteq X$ un sottoinsieme. Dato $x \in X$ sono equivalenti: (1) esiste una successione in S che converge a x ; (2) x è un punto di accumulazione per una successione a valori in S ; (3) $x \in \overline{S}$.

Lemma: in uno spazio topologico compatto ogni successione possiede punti di accumulazione.

Definizione di compattezza per successioni.

Lemma: uno spazio 1-numerabile è compatto per successioni se e solo se ogni successione possiede punti di accumulazione.

Proposizione: X 2-numerabile. Allora vale che X è compatto se e solo se è compatto per successioni.

Giovedì 4 dicembre (2 ore- Esercitazioni).

Esercizi su spazi quoziente e separabilità.

Martedì 9 dicembre (2 ore).

Introduzione alla Topologia Algebrica. Definizione di spazio topologico localmente connesso. Esempio di spazi connessi ma non loc. connessi: la pulce e il pettine e Esercizio 10.1 Manetti. Definizione di spazio localmente connesso per archi e di componenti connesse per archi. Definizione di $\pi_0(X)$ = insieme delle componenti connesse per archi di X .

Proposizione: se X è uno spazio localmente connesso per archi le sue componenti connesse per archi sono aperte, chiuse e coincidono con le componenti connesse.

Definizione di omotopia tra funzioni continue. Esempi: tutte le funzioni continue tra uno spazio qualsiasi e un sottospazio convesso di \mathbb{R}^n sono omotope.

Mercoledì 10 dicembre (2 ore).

La mappa antipodale sulla sfera n -dimensionale $S^n \rightarrow S^n$ è omotopa all'identità se n è dispari (vedremo più avanti che non lo è se n è pari).

Definizione di equivalenza omotopica tra spazi topologici. Esempi: Due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti. Tutti i sottoinsiemi convessi di \mathbb{R}^n , per ogni n , sono omotopicamente equivalenti.

Definizione di spazio contraibile (o contrattile).

Esempi: un sottospazio convesso di \mathbb{R}^n è contraibile; definizione di sottoinsieme stellato di \mathbb{R}^n . Un tale sottoinsieme è contraibile.

Prop: X contraibile è connesso per archi.

Verifica che X è contraibile se e solo se la applicazione identica su X è omotopa alla applicazione costante $X \rightarrow X$ su qualunque punto di X .

Oss: vedremo nelle prossime ore che invece S^1 è connesso per archi ma non contraibile.

Retratti (forti e non) di deformazione. Definizioni (seguendo le notazioni del Kosniowski) ed esempi: una corona circolare si retrae forte di deformazione su uno dei suoi bordi.

Giovedì 11 dicembre (2 ore- Esercitazioni).

Verifica che l'omotopia è una relazione di equivalenza sullo spazio delle funzioni continue tra due spazi X e Y , che indichiamo $\mathcal{C}(X, Y)$.

Il prodotto di spazi contraibili è contraibile.

Esempi di retratti di deformazione.

Martedì 16 dicembre (2 ore).

Definizione della applicazione indotta da una mappa continua sugli spazi π_0 delle componenti connesse per archi; verifica della "functorialità di questa applicazione.

Retratti, retratti di deformazione; retratti deboli e forti di deformazione (notazioni del Kosniowski). Esempi. Definizione di omotopia relativa a un sottospazio.

Sia X spazio topologico e $Y \subset X$ un retratto di deformazione. Allora l'inclusione $i: Y \hookrightarrow X$ è una equivalenza omotopica.

Esempi-esercizi: S^n è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Un triangolo pieno si retrae su due suoi lati.

Mercoledì 17 dicembre (2 ore).

Prodotti di cammini. (notazione $\alpha \star \beta$). Definizione ed esempi. Cammino inverso ad un cammino α : $\bar{\alpha}(t) := \alpha(1-t)$.

Equivalenza di cammini (notazione $\alpha \sim \beta$). Definizione ed esempi.

Prodotto sulle classi di equivalenza di cammini. Proprietà. Discussione su: cosa manca per farlo diventare un gruppo?

Dato $x \in X$ chiamo ϵ_x il cammino costante in x . Sia α cammino tra x e y in uno spazio topologico X .

Lemma 1: Vale che $\alpha \star \epsilon_y \sim \epsilon_x \star \alpha \sim \alpha$.

Lemma 2: Vale che $\alpha \star \bar{\alpha} \sim \epsilon_x$ e $\bar{\alpha} \star \alpha \sim \epsilon_y$.

Definizione di gruppo fondamentale o gruppo di Poincarè $\pi_1(X, x_0)$. Verifica che è un gruppo.

Teorema: Se esiste un arco γ tra x ed y in X allora c'è un isomorfismo di gruppi u_γ tra $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$.

Definizione di spazio semplicemente connesso.

Giovedì 18 dicembre (2 ore- Esercitazione Monti).

Mercoledì 7 gennaio (2 ore).

Corollario: in uno spazio cpa il gruppo fondamentale non dipende dal punto base scelto.

Osservazione: Quindi per uno spazio cpa X a volte scriveremo soltanto $\pi_1(X)$, ma attenzione che non c'è un isomorfismo canonico.

Gruppi fondamentali e mappe continue: l'omomorfismo indotto. Proprietà di functorialità dell'omomorfismo indotto.

Esercizio: se $Y \subseteq X$ è un retratto di X allora i_* è iniettiva e r_* è suriettiva.

Teorema: (15.12 Kosniowski): mappe omotope danno luogo ad omomorfismi corrispondenti (modulo un isomorfismo).

Teorema: Se X e Y sono spazi topologici omotopicamente equivalenti allora i gruppi fondamentali sono omeomorfi.

Osservazione: il gruppo fondamentale è dunque un invariante omotopico.

Giovedì 8 gennaio (2 ore- Esercitazione De Ponti). Proposizione: (es. 15.18 (d) Kosniowski): il gruppo fondamentale di un gruppo topologico è abeliano.

Martedì 13 gennaio (2 ore).

Teo: Il gruppo fondamentale di uno spazio prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali.

Il gruppo fondamentale della circonferenza. Prima parte. (referenza: Kosniowski capitolo 16).

Definizione (e verifica dell'esistenza di) intorni uniformemente rivestiti di S^1 rispetto alla mappa esponenziale.

Teorema di sollevamento delle mappe $f: I \rightarrow S^1$

Conseguenza: definizione della funzione "grado" di un cammino chiuso in S^1 puntato in 1.

Mercoledì 14 gennaio (2 ore).

Il gruppo fondamentale della circonferenza. Seconda parte.

Verifica che la funzione grado è ben definita: Teorema di sollevamento delle omotopie in S^1 .

Teorema: la funzione grado è un isomorfismo tra $\pi_1(S^1, 1)$ e \mathbb{Z} .

Corollario: il gruppo fondamentale del toro è $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Giovedì 14 gennaio (2 ore- Monti).

Corollari del fatto che il gruppo fondamentale di S^1 è \mathbb{Z} : dimostrazione topologica del teorema fondamentale dell'algebra; Teorema del punto fisso di Brouer sul disco D^2 .

Martedì 20 gennaio (2 ore).

Teorema (Van-Kampen baby) Sia X spazio topologico e siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due suoi aperti tali che $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Sia $x_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, e siano $i_*: \pi_1(\mathcal{U}, x_0) \rightarrow \pi_*(X, x_0)$ e $j_*: \pi_1(\mathcal{V}, x_0) \rightarrow \pi_*(X, x_0)$ gli omomorfismi indotti dalle inclusioni $i: \mathcal{U} \hookrightarrow X$ e $j: \mathcal{V} \hookrightarrow X$. Se \mathcal{U} , \mathcal{V} e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ sono connessi per archi, allora il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ è generato dalle immagini di i_* e j_* .

Oss: la connessione per archi di $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ è necessaria: controesempio di S^1 .

Corollario: se X è unione di suoi aperti semplicemente connessi tali che l'intersezione è connessa per archi, allora X è semplicemente connesso.

Corollario: la sfera S^n per $n \geq 2$ è semplicemente connessa.

Mercoledì 21 gennaio (2 ore).

Esercizio: il complementare di un insieme finito di punti in \mathbb{R}^n con $n \geq 3$ è semplicemente connesso.

Dimostrazione che:

- Nessun aperto di \mathbb{R} è omeomorfo a un aperto di \mathbb{R}^n per $n > 1$;
- \mathbb{R}^2 non è omeomorfo a \mathbb{R}^m per $m \neq 2$.

Fatto solo enunciato: *Nessun aperto di \mathbb{R}^n è omeomorfo a un aperto di \mathbb{R}^m per $n \neq m$.*

Dimostrazione dell'esercizio 4 dell'esame del 17 febbraio 2014.

Una curva continua può riempire il piano: la curva di Peano nella formalizzazione di Hilbert (referenza: Munkres, Topology).