

Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 17 febbraio 2014

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero fate la dimostrazione, se falso esibite un controesempio]
 - (a) Uno spazio contraibile è connesso.
 - (b) Tutti gli spazi con la topologia concreta sono connessi per archi.
 - (c) Tutti gli spazi con la topologia concreta sono connessi per archi.
 - (d) Esiste uno spazio con la topologia concreta connesso per archi.

2. Dati due sottinsiemi S_1 e S_2 di uno spazio topologico X , è vero che $\overline{S_1 \times S_2} = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$ in $X \times X$?

3. Sia $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta da quella euclidea.
 - (a) Dimostrare che lo spazio quoziente $X/\{0, 1\}$ è omeomorfo a
$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$
 - (b) Dimostrare che $X/\{0, 1/2, 1\}$ è omeomorfo al bouquet di due circonferenze.
 - (c) Dimostrare che X/Y dove $Y = \{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ non è omeomorfo al bouquet di n circonferenze.

4. Suddividere in classi di omeomorfismo e di omotopia i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 :
 - (a) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$;
 - (b) S^2 ;
 - (c) $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 1\}$;
 - (d) $S^1 \times [0, 1]$;
 - (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.