LEZIONE 16-10-27

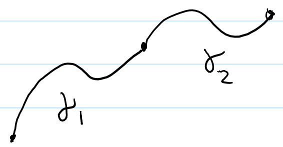
giovedì 27 ottobre 2016 09:09

Concatenazione e "inversa" di curve

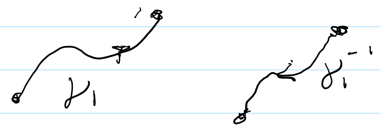
Siano γ_1 e $\gamma_2 : [0,1] \to X$ due curve t.c. $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. La concatenazione

$\gamma_2 * \gamma_1 : [0,1] \to X$

$$\gamma_2 * \gamma_1 (t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$



Si pone inoltre $\gamma_1^{-1} : [0,1] \to X$ $\quad \gamma_1^{-1}(t) = \gamma_1(1-t)$

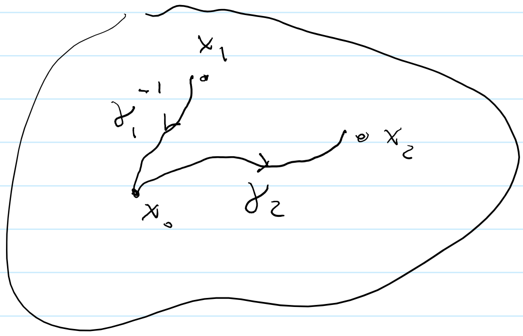


Visto: Uno spazio connesso per archi (ogni coppia di pti di X può essere congiunta da un cammino) è connesso

Teorema: Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto e connesso allora è connesso per archi

Nota: In generale connesso $\not\Rightarrow$ connesso per archi neanche per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$

<u>Dim</u>: Fissato $x_0 \in A$ è sufficiente verificare che $\forall x \in A$ $\exists \gamma : [0,1] \to A$ t.c. $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x$. Dati x_1, x_2



$\in A$ se $\gamma_i : [0,1] \to X$ $\quad \gamma_i(0) = x_0 \quad \gamma_i(1) = x_i$ allora $\gamma_2 * \gamma_1^{-1}$ è un cammino che congiunge x_1 a x_2

Sia quindi $x_0 \in A$ fissato e poniamo

$$C = \{ x \in A : \exists \gamma : [0,1] \to A \quad \gamma(0) = x_0 \quad \gamma(1) = x \}$$

Se mostriamo che

1) $C \neq \emptyset$ ovvio $x_0 \in C$

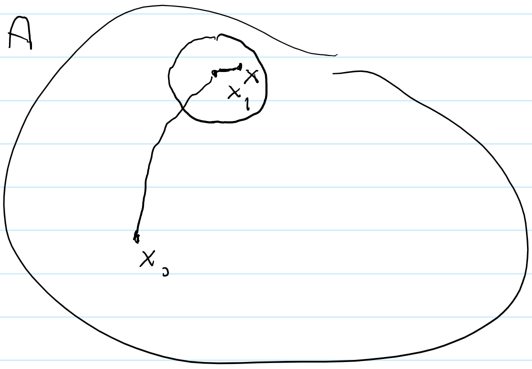
2) C è aperto in A ($\Leftrightarrow$ C è aperto)

3) C è chiuso in A

A connesso $\Rightarrow$ $C = A$ che è la tesi

2) C è aperto: Sia $x_1 \in C$ devo mostrare che $\exists$ un intorno $U \ni x_1$ t.c. $U \subseteq C$ cioè $\exists$ U aperto $x_1 \in U$ t.c. $\forall x \in U$ $\exists$ $\gamma : [0,1] \to A$ $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x$

A



Poichè $x_1 \in A$ aperto $\exists$ $r > 0$ t.c. $B = B_{x_1}(r) \subseteq A$ Poichè $x_1 \in C$ $\exists$ $\gamma : [0,1] \to A$ t.c. $\gamma(0) = x_0$ $\gamma(1) = x_1$ Se $r : [0,1] \to B$ è il raggio che congiunge x_1 a x:

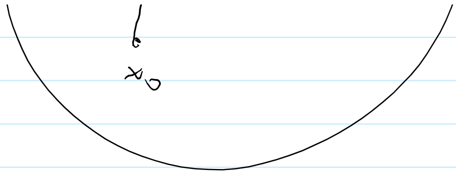
$$r(t) = tx + (1-t)x_1$$

la concatenazione $r * \gamma_1$ è una curva in A che congiunge x_0 a x

3) C è chiuso in A cioè mostriamo che se $x \in \overline{C}^A = \overline{C} \cap A$ allora $x \in C$ ($\overline{C}^A = C$) Poichè $x \in A$ come sopra $\exists$ $B = B_x(r) \subseteq A$ Poichè B è aperto e $x \in \overline{C}^A$ $B \cap C \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $\exists$ $x_1 \in B \cap C$ Per ipotesi $\exists$ $\gamma : [0,1] \to A$ t.c.

$x \in \overline{C}^A$

$\gamma(0) = x_0$ e $\gamma_1(x_1)$ e se r è il raggio che congiunge x a x_1 la



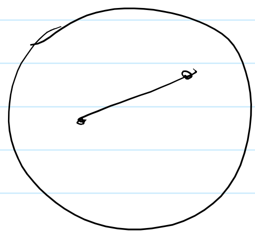
congiunge x a x_1 la concatenazione $r^{-1} \# \gamma$

è una curva in A che congiunge x_0 a x ☑

Definizioni Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (in X vettoriale) si dice che

i) A è convesso se $\forall x, y \in A$ il segmento che li congiunge

$$s(t) = ty + (1-t)x \in A \quad \forall t \in [0,1]$$



ii) A è stellato rispetto a un suo pto x_0 se $\forall x \in A$

il segmento che li congiunge è contenuto in A

Nota A è convesso sse è stellato rispetto ad ogni suo pto

Prop: i) A convesso $\Rightarrow$ A connesso per archi

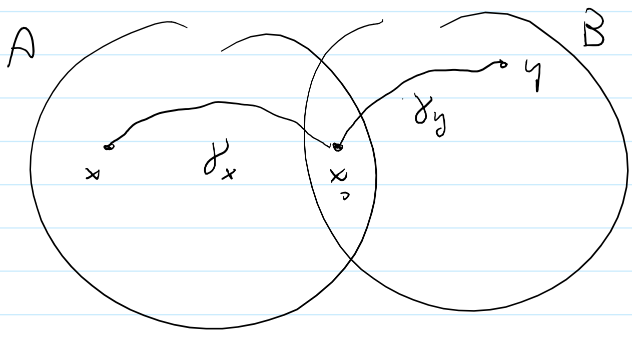
ii) A stellato rispetto ad un suo pto $\Rightarrow$ A connesso per archi

i) immediato

ii) esercizio

Esercizio Se A e B sono connessi per archi e $A \cap B \neq \emptyset$

allora $A \cup B$ è connesso per archi



- $\mathbb{R}^n$ è convesso $\Rightarrow$ connesso per archi
- $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ $n \geq 1$ è connesso per archi

Infatti i $S^n = (S^n \setminus \{N\}) \cup (S^n \setminus \{S\})$

ii $(S^n \setminus \{N\}) \cap (S^n \setminus \{S\}) \neq \emptyset$

iii) $S^n \setminus \{N\}$ e $S^n \setminus \{S\}$ sono omeomorfi a $\mathbb{R}^n$ per proiezione stereografica

iv) Poichè la connessione per archi è una proprietà topologica $S^n \setminus \{N\}$ e $S^n \setminus \{S\}$ sono connessi per archi

v) Per l'esercizio S^n è connesso per archi

Intervalli di $\mathbb{R}$

Def Si dice intervallo di $\mathbb{R}$ un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}$

Teorema: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ Sono equivalenti

i) I è un intervallo (= convesso)

ii) I è connesso per archi

iii) I è connesso

Dim L'unica implicazione da verificare è $3) \Rightarrow 1)$

Supponiamo che i) non valga I non è convesso

Per definizione $\exists\ a < b < c$ t.c. $a, c \in I$ $b \notin I$

Ma allora $a \in (-\infty, b) \cap I$ e $I \cap \underset{\Psi c}{(b, +\infty)}$ sono aperti non vuoti disgiunti e la loro unione è I che quindi non è connesso

Esempio $[a, b]$ $[a, b)$ e (a, b) sono tutti non omeomorfi tra loro

Nota $[a, b)$ e $(a, b]$ sono omeomorfi (Esercizio)

Ricordiamo che se $f: X \to Y$ è un omeomorfismo e $A \subseteq X$ allora A è connesso se e solo se $f(A)$ è connesso

Consideriamo p.cs. $[a,b]$ e (a,b) se ci fosse $f: [a,b] \to (a,b)$ omeomorfismo $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(b) = c$ Ma $[a,b) = [a,b] \setminus \{b\}$ è connesso mentre $f([a,b)) = (a,b) \setminus \{c\}$ che non è connesso

La dimostrazione che $[a,b)$ <u>non</u> è omeomorfo ad (a,b) è identica

Esercizio $[a,b]$ non è omeomorfo ad $[a,b)$

Lemma Sia $n \geq 1$ e sia $f: S^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\exists\, x \in S^n$ t.c. $f(x) = f(-x)$

In particolare f <u>non</u> è iniettiva

<u>Dim</u>: Sia $g(x) = f(x) - f(-x)$ cosicché la tesi è che $\exists\, x : g(x) = 0$ Poiché S^n è connessa $g(S^n)$ è un intervallo I. Quindi fissato $y \in S^n$, $g(S^n) = I$ contiene $g(y)$ e $g(-y)$ e poiché $g(S^n)$ è convesso contiene quindi $\frac{1}{2} g(y) + \frac{1}{2} g(-y) =$

$$= \frac{1}{2}\left[f(y) - f(-y)\right] + \frac{1}{2}\left[f(-y) - f(y)\right] = 0$$

Corollario Un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$ non può essere omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}$

<u>Dim</u>: Per definizione di aperto A contiene una sfera n-dimensionale S^n. Se $f: A \to \mathbb{R}$ è continua allora $f: S^n \to \mathbb{R}$ è continua e per il Lemma non

può essere iniettiva

Lemma Sia $f: X \to Y$, X, Y spazi topologici t.c.

Y è connesso, f è suriettiva $f^{-1}(y)$ è connesso $\forall y$

Se f è aperta o chiusa allora X è connesso

Dim Supponiamo f aperta. Siano A_1 e A_2 aperti $\neq \emptyset$ in X t.c. $X = A_1 \cup A_2$ Tesi $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

f è suriettiva e aperta quindi

$$f(X) = Y = \underset{\emptyset}{\underset{\#}{f(A_1)}} \cup \underset{\emptyset}{\underset{\#}{f(A_2)}}$$

con $f(A_i) \neq \emptyset$ e aperto Poiché Y è connesso $\exists y$

$$y \in f(A_1) \cap f(A_2) \underset{(*)}{\Longrightarrow} f^{-1}(y) \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$$

Infatti $\exists x_i \in A_i : f(x_i) = y$ ovvero $f^{-1}(y) \cap A_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$ Ma $f^{-1}(y) \cap A_i$ è aperto in $f^{-1}(y)$, non vuoto e $(f^{-1}(y) \cap A_1) \cup [f^{-1}(y) \cap A_2] = f^{-1}(y)$ connesso.

Quindi $f^{-1}(y) \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

Ma questo implica a maggior ragione che $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

Se f è supposta chiusa si considerano invece A_1 e A_2 chiusi

Proposizione: Se X e Y sono connessi, $X \times Y$ è connesso

Dim La proiezione $q: X \times Y \to X$ $q(x,y) = y$ è suriettiva e aperta e $q^{-1}(y) = X \times \{y\}$ è connesso (è omeomorfo a X)

La tesi segue immediatamente dal Lemma $\square$

Esercizio: Dimostrare che X e Y connessi per archi

$\Rightarrow$ $X \times Y$ connesso per archi

Componenti connesse: Sia X spazio topologico. $C \subseteq X$

si dice componente connessa di X se

1) C è connesso

2) $\forall A$ connesso $A \supseteq C$ allora $A = C$

C è connesso massimale rispetto all'inclusione

Esempio Se $C \subseteq X$ è aperto e chiuso e non vuoto

allora C è una componente connessa. Infatti sia $E \supseteq C$

connesso. Poiché $C \subseteq E$ è aperto e chiuso in X e quindi

in E per la connessione di E deve essere $E = C$ o $C = \emptyset$

Ma la seconda alternativa è esclusa e quindi $E = C$ e C

è componente connessa

Le componenti connesse non sono necessariamente aperte

ma sono sempre chiuse

Lemma Sia X spazio topologico $Y \subseteq X$ connesso e

W t.c. $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$. Allora W è connesso

In particolare Y connesso $\Rightarrow$ $\overline{Y}$ connesso

Corollario Se C è componente connessa di X C è chiuso

Infatti $\overline{C}$ è connesso e $\overline{C} \supseteq C$ da cui per definizione

di componente connessa $\overline{C} \subseteq C$ e $C = \overline{C}$ $\boxtimes$

Dim (Lemma) Sia $E \subseteq W$ aperto chiuso (in W) e non

vuoto. Poiché $Y \subseteq W$ e poiché la topologia che Y

eredita da X coincide con la topologia che Y eredita da W

(Esercizio) $E\cap Y$ è aperto e chiuso in Y. Poiché

Y è connesso risulta che o $E\cap Y=\emptyset$ o $E\cap Y=Y$

Ma Y è denso in W ($\overline{Y}^W=\overline{Y}\cap W=W$ perché $\overline{Y}\supseteq W$)

e E è aperto in W cosicché $E\cap Y\neq\emptyset$ da cui $E\cap Y=X$

e quindi $Y\subseteq E$. Si ha quindi $Y\subseteq E\subseteq W\subseteq\overline{Y}$ da cui

$W=\overline{Y}\cap W\subseteq\overline{E}\cap W=\overline{E}^W=E$. Si conclude che ogni $E\subseteq W$ che è

$\overline{Y}\supseteq W$ $\qquad$ E chiuso in W

non vuoto, aperto e chiuso in W coincide con W come richiesto per dimostrare

che W è connesso $\square$