ESERCIZI 1

L. Stoppino, corso di Advanced Geometry B
Università dell'Insubria, a.a. 2016/17
Consegna: martedì 21 marzo

1. Classificare le coniche di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ a meno di proiettività. Classificare le coniche anche come spazi topologici con la topologia indotta da qualla euclidea su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

2. Sia $X$ uno spazio topologico. Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio irriducibile. Dimostrare che la chiusura di $Y$ in $X$ è irriducibile.

3. Dimostrare direttamante che un dominio a ideali principali soddisfa la ascending chain condition sugli ideali.

4. (a) Sia $k$ un campo infinito. Dimostrare che per ogni $n, m \geq 1$ la topologia di Zariski di $\mathbb{A}^{n+m}_k$ non è la topologia prodotto delle topologie di Zariski di $\mathbb{A}^n_k$ e $\mathbb{A}^m_k$.
   (b) Sia $k$ un campo qualunque. Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m_k$ due insiemi algebrici. Mostrare che $X \times Y$ è un insieme algebrico di $\mathbb{A}^{n+m}_k$.

5. (a) Sia $X_t$ l'insieme delle matrici $n \times m$ a coefficienti in un campo $k$ di rango minore o uguale a $t$. L'insieme $X_t$ è un insieme algebrico in $\mathbb{A}^{mn}_k$? (dimostrarlo o fare un controesempio)
   (b) Si consideri l'insieme delle matrici unitarie speciali $SU(2, \mathbb{C})$. È un insieme algebrico in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$? Lo è in $\mathbb{A}^8_{\mathbb{R}}$, identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$?

6. Sia $k$ algebricamente chiuso. Si consideri l'applicazione $\mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^3_k$ definita come $t \mapsto (t, t^2, t^3)$.
   (a) Mostrare che l'immagine $X$ di questa applicazione è un insieme algebrico che può essere definito da due equazioni.
   (b) Calcolare l'ideale $I(X)$.
   (c) Prendiamo ora l'applicazione $t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$, e sia $Y$ la sua immagine in $\mathbb{A}^3_k$. Provare che l'Ideale $I(Y)$ è primo e trovare dei generatori. Provate a dimostrare che $I(Y)$ non può essere generato da meno di tre elementi.

7. Trovare la decomposizione in chiusi irriducibili dell'insieme algebrico di $\mathbb{A}^3_k$:

$$X = V(x^2 - yz, xz - x).$$