

ESERCIZI 3

L. Stoppino, corso di Advanced Geometry B

Università dell'Insubria, a.a. 2016/17

Consegna: mercoledì 19 aprile

1. (Hulek Ch.1 Ex (7)) Sia $A = k[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2)$. Come esempio di normalizzazione di Noether, determinare $y_1, \dots, y_m \in A$, algebricamente indipendenti su k , tali che A è una $k[y_1, \dots, y_m]$ -algebra finita.
2. Sia A un dominio di integrità, $f, g \in A[x]$ e $s \in (f, g) \cap A$. Provare che $s^3 \in (f^2, g^2) \cap A$ e che $R(f^2, g^2) = R(f, g)^4$. Dedurre che, in generale, il risultante non genera l'ideale contratto $(f, g) \cap A$.
3. (a) Dimostrare che per ogni $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ insieme algebrico, l'anello delle coordinate di X è una k -algebra finitamente generata e ridotta.
(b) Dimostrare che una varietà $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ ha due componenti connesse se e solo se l'anello delle coordinate $k[X]$ può essere scritto come il prodotto di due k -algebre finitamente generate e ridotte.
4. Sia $F: X \rightarrow Y$ un morfismo di varietà affini.
 - (a) Mostrare che $F^*: k[Y] \rightarrow k[X]$ è iniettivo se e solo se F è dominante, cioè $F(X)$ è denso in Y .
 - (b) Mostrare che $F^*: k[Y] \rightarrow k[X]$ è suriettivo se e solo se F definisce un isomorfismo tra X e qualche sottovarietà algebrica di Y .
 - (c) Cercare un esempio in cui F è iniettivo ma $F^*: k[Y] \rightarrow k[X]$ non è suriettivo.