

Geometria I- Diario delle lezioni

L. Stoppino, Università dell'Insubria, a.a. 2017/2018

Mercoledì 27 settembre (9-11, 2 ore).

Introduzione del corso.

Spazi metrici: Definizione ed esempi (metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$, metrica discreta).

Aperti negli spazi metrici. Verifica che le bolle sono aperte.

Gli aperti rispetto a una metrica sono tutte e sole le unioni di bolle.

Proprietà degli insiemi aperti.

Continuità in un punto.

Mercoledì 27 settembre (14-16, 2 ore). Esercizi sugli spazi metrici.

Giovedì 28 settembre (9-11, 2 ore).

Equivalenza tra metriche. Equivalenza topologica: due metriche d, d' su un insieme X si dicono topologicamente equivalenti se inducono la stessa topologia.

Limitazione standard di una metrica.

Verifica che equivalenti $\Rightarrow$ topologicamente equivalenti ma che il viceversa non vale. (Ref. Manetti 3.1 e 3.4)

Teorema: una funzione $f: X \rightarrow Y$ tra due spazi metrici è continua se e solo se la controimmagine di aperti in Y è aperta in X .

Def di intorno di un punto.

Prop: una funzione $f: X \rightarrow Y$ tra due spazi metrici è continua in $x_0 \in X$ se e solo se la controimmagine di intorni di $f(x_0)$ è un intorno di x_0 .

Mercoledì 4 ottobre (9-11, 2 ore).

Definizione di spazio topologico.

Primi esempi: 1) topologia discreta; 2) topologia euclidea su $\mathbb{R}$ 3) topologia concreta; 4) topologia della semicontinuità inferiore su $\mathbb{R}$.

Topologia indotta da una metrica: spazi metrizzabili.

Topologie su insiemi finiti con pochi elementi.

Topologie confrontabili, più o meno fini.

Topologia cofinita.

Mercoledì 4 ottobre (15-17, 2 ore). Esercizi sugli spazi metrici. Esercizi: 1) L'unica topologia metrizzabile su uno spazio finito è quella discreta. 2) Enumerazione delle topologie su un insieme con 3 elementi.

Giovedì 5 ottobre (9-11, 2 ore)

Verifica che la cofinita è una topologia.

Chiusi di uno spazio topologico. Proprietà.

L'intersezione di topologie è una topologia: topologia generata da una famiglia di sottoinsiemi. (ref. Manetti 3.1).

Base di una topologia. Esempi (bolle aperte per uno spazio metrico, i singoletti sono una base per la topologia discreta, esempi su uno spazio con tre elementi).

Mercoledì 11 ottobre (9-11, 2 ore)

Teorema della base (quando una famiglia di aperti può essere base di una topologia: Teorema 3.7 del Manetti).

Esempio importante: retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$.

Esercizio: Verifica che la topologia $\mathcal{T}_s$ è strettamente più fine di quella euclidea $\mathcal{T}_e$ e strettamente meno fine di quella discreta $\mathcal{D}$.

Esempi.

Mercoledì 11 ottobre (14-16, 2 ore)

Esercizi: verifica che $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ è di Hausdorff, che i punti sono chiusi, che $(0, 1)$ non è chiuso (ma è aperto).

Mettrizzabile $\Rightarrow T_2$.

Giovedì 12 ottobre (2 ore)

Definizioni di intorni. Un sottoinsieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.

Parte interna e chiusura di un sottoinsieme. Definizione e prime proprietà. Esempi. (Ref. Manetti 3.1 e 3.2).

Classificazione dei punti rispetto ad un sottoinsieme S : punti interni, esterni, di frontiera.

Definizioni ed esempi di sottospazi densi. Esempi importanti: densità di $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$. Densità in spazi discreti e in spazi concreti.

Martedì 17 ottobre (16-18, 2 ore)

Esercizi su parte interna e chiusura (es. 22 del foglio1)

Mercoledì 18 ottobre (9-11, 2 ore)

Definizione di continuità ed esempi.

Lemma: $f: X \rightarrow Y$ continua se e solo se per ogni $S \subseteq X$ $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$.

Teo: composizione di applicazioni continue è una applicazione continua.

Definizione di continuità in un punto.

Teo: f è continua se e solo se è continua in ogni punto.

Definizione di omeomorfismo. Definizione di spazi omeomorfi. Essere omeomorfi è una relazione di equivalenza.

Mercoledì 18 ottobre (14-16, 2 ore)

Esercizi su continuità.

Giovedì 19 ottobre (9-11, 2 ore)

Applicazioni aperte e chiuse.

Lemma: data una applicazione $f: X \rightarrow Y$ tra spazi topologici sono equivalenti:

- f è un omeomorfismo;
- f è continua biunivoca e aperta;
- f è continua biunivoca e chiusa.

Topologia di sottospazio. Esempio: il caso degli spazi metrici.

Data un'applicazione da un insieme X a uno spazio topologico $(Y, \mathcal{S})$, definizione della topologia generata $f^{-1}\mathcal{S}$ su X .

Teorema: sia $\varphi: (Z, \mathcal{T}) \rightarrow (X, f^{-1}\mathcal{S})$. Allora φ è continua se e solo se $f \circ \varphi$ è continua.

Martedì 24 ottobre (16-18, 2 ore)

Esercizi.

Mercoledì 25 ottobre (14-16, 2 ore- Bianchi)

Proiezione stereografica: definizione e dimostrazione che per ogni $P \in S^n$ è un omeomorfismo da $S^n \setminus P$ a $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 9 del Foglio 2: definizione di omeomorfismo locale. Esempi Dimostrazione che un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta. (ref. 12.1 Manetti).

Esercizio 14 Foglio 2: esempio di omeomorfismo locale che non è un'applicazione chiusa.

Esercizi numero 7.c, 11, 14 e 16 del foglio esercizi numero 2.

Giovedì 26 ottobre (9-11, 2 ore- Bianchi)

Esercizi numero 2, 9, 10, 15 e 20.

Dimostrato che in uno spazio metrico un punto appartiene ad un chiuso C se e solo se esiste una successione di elementi in C convergente al punto.

Mostrato un esempio di spazio metrico in cui la chiusura topologica di una bolla aperta non è uguale alla bolla chiusa.

Introdotta la definizione norma e di distanza indotta da una norma. Introdotta la definizione di funzionale, norma di un funzionale e continuità di un funzionale per risolvere più agilmente il punto (b) dell'esercizio numero 10.

Giovedì 2 novembre (9-11, 2 ore)

Topologia indotta su un insieme X da una famiglia di applicazioni $f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha$, con Y_α spazio topologico.

Definizione di immersione. Esempi, esempi di applicazioni iniettive e continue che non sono immersioni.

Sottospazi discreti. Esercizi sui sottospazi discreti.

Lemma: Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua.

- Se f è iniettiva e aperta, è un'immersione aperta.
- Se f è iniettiva e chiusa è un'immersione chiusa.

Prop: se $A \subseteq Y$ e $Y \subseteq (X, \mathcal{T})$ allora la chiusura di A in Y (che denotiamo $\overline{A}^Y$) coincide con l'intersezione della chiusura di A con Y .

Prop: siano $E \subseteq Y \subseteq X$. Allora

1. Se Y è aperto in X allora $E \subseteq Y$ è aperto in Y se e solo se E è aperto in X ;
2. Se Y è chiuso in X allora $E \subseteq Y$ è chiuso in Y se e solo se E è chiuso in X ;
3. Se Y è intorno di y in X allora E è intorno di y in Y se e solo se è intorno di y in X .

Definizione di topologia prodotto. Base canonica per la topologia prodotto.

Mercoledì 8 novembre (10-12, 2 ore)

Teo: le proiezioni sono aperte (ma non sempre chiuse: controesempio); un'applicazione in uno spazio prodotto è continua se e solo se lo sono le sue componenti; le fibre sono omeomorfe alle componenti.

Metriche sui prodotti di spazi metrici. Verifica che la topologia indotta dalla metrica prodotto è la topologia prodotto delle due topologie indotte sui fattori dalle due metriche di partenza.

Es: il prodotto di elementi di base è una base per la topologia prodotto. In particolare la topologia prodotto su $\mathbb{R}^n$ indotta dalla topologia euclidea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ è la topologia euclidea.

Esercizio illuminante: Verifica che in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ il sottospazio $R = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\}$ è discreto, mentre il sottospazio $T = \{(x, x) \in \mathbb{R}\}$ è omeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$.

Giovedì 9 novembre (9-11, 2 ore)

Prop: sottospazi di T2 sono T2; il prodotto di spazi T2 è T2.

Teo: X è T2 se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto.

Oss: essere T2 è una proprietà topologica.

Prop: siano $f, g: X \rightarrow Y$ funzioni continue da uno spazio topologico a uno spazio T2. Allora $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è un chiuso di X .

Prop: sia $f: X \rightarrow Y$ funzione continua da uno spazio topologico a uno spazio T2. Allora il grafico di f è chiuso.

Mercoledì 15 novembre (11-13, 2 ore)

Assiomi di separazione T_0 , T_1 , T_2 , T_3 , T_4 e relazioni tra di loro.

Spazi regolari, spazi normali.

Esempio di uno spazio che è T_4 ma non T_3 , nè T_2 , nè T_1 , nè T_0 .

Mercoledì 15 novembre (14-16, 2 ore)

Esercizi su spazi prodotto ed assiomi di separazione.

Giovedì 16 novembre (9-11, 2 ore)

Spazi quoziente.

Definizione di topologia indotta $\mathcal{T}_f$ da una mappa $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow Y$ e prime proprietà (in particolare verifica che è la più fine topologia che rende continua f).

Definizione di sottoinsiemi saturi. Verifica che un sottoinsieme $B \subset Y$ è aperto se e solo se è immagine di un aperto saturo A di X .

Osservazione: non è vero in generale che f è aperta nè chiusa.

Esempio importante: $e: [0, 1] \rightarrow S^1$ definita da $e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ è un'identificazione chiusa ma non aperta.

Teorema: (proprietà universale dello spazio quoziente): Siano X , Z spazi topologici, Y un insieme. Siano $f: X \rightarrow Y$, $g: Z \rightarrow Y$ applicazioni con f suriettiva e g continua. Allora esiste $h: (Y, \mathcal{T}_f) \rightarrow Z$ continua tale che $g = h \circ f$ se e solo se g è costante sulle fibre di f .

Martedì 21 novembre (16-18, 2 ore)

Esercizi sulla topologia quoziente: la lingua biforcuta (Manetti esercizio 5.7).

Esercizio 1 Foglio 3: $\mathbb{R} \times S^1 \sim \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Mercoledì 22 novembre (9-11, 2 ore)

Lemma: Sia Y lo spazio quoziente di uno spazio X relativo ad una suriezione $f: X \rightarrow Y$. Sia $g: Z \rightarrow Y$ applicazione con Z spazio topologico. Allora sono equivalenti:

(i) g è continua da $(Y, \mathcal{T}_f)$ a Z ;

(ii) $g \circ f: X \rightarrow Z$ è continua.

Oss: questo lemma è equivalente alla proprietà universale della topologia quoziente.

Vale inoltre, nelle stesse ipotesi del Lemma, (iii) Se g è suriettiva, vale che g è aperta se e solo se $g \circ f$ è aperta.

Osservazione importante: ogni relazione di equivalenza $\sim$ su un insieme X corrisponde ad un'opportuna applicazione suriettiva da X e viceversa. Data una relazione di equivalenza su uno spazio topologico chiamiamo spazio quoziente $X/\sim$ l'insieme delle classi di equivalenza con la topologia quoziente indotta dalla proiezione al quoziente $\pi: X \rightarrow X/\sim$ $\pi(x) = [x]$.

Cor (della proprietà universale della topologia quoziente): se $\sim$ è una relazione di equivalenza sullo spazio topologico X e $\pi: X \rightarrow X/\sim$ è la proiezione sul quoziente, data $g: Z \rightarrow X/\sim$ applicazione continua da uno spazio topologico Z . Allora esiste $\tilde{g}: X/\sim \rightarrow Z$ continua tale che $g = \tilde{g} \circ \pi$ se e solo se g è costante sulle classi di equivalenza di $\sim$.

Se $S \subseteq X$, consideriamo la relazione di equivalenza: $x \sim x'$ sse $x = x'$ oppure $x, x' \in S$. Lo spazio quoziente $X/\sim = X/S$ si chiama contrazione di S ad un punto. Esempi di contrazioni ad un punto.

Esercizio importante: la contrazione a un punto $[0, 1]/\{0, 1\} \sim S^1$.

Esempi importanti: cilindro, nastro di Möbius come quozienti di figure piane con lati identificati.

Mercoledì 22 novembre (14-16, 2 ore)

Esercizio: la restrizione della mappa esponenziale $[0, 1] \rightarrow S^1$ è un'identificazione chiusa. La restrizione a $[0, 1) \rightarrow S^1$ non lo è.

Esercizio: Sia Y lo spazio quoziente di uno spazio X relativo ad una suriezione $f: X \rightarrow Y$. Vale che $C \subseteq Y$ è chiuso se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X .

Esercizio: Nelle notazioni dell'esercizio precedente, un quoziente topologico è T1 se e solo se per ogni $p \in Y$ la fibra su p $f^{-1}(p)$ è chiusa in X . Esercizio: la contrazione a un punto del bordo del disco 2-dimensionale chiuso è omeomorfo a S^2 .

Esercizio: composizione di mappe quozienti è mappa quoziente.

Giovedì 23 novembre (9-11, 2 ore)

Continuazione esempi: toro, piano proiettivo reale, bottiglia di Klein.

Azioni di gruppi su insiemi: richiami.

Azioni di gruppi su spazi topologici. Definizione e prime proprietà.

Martedì 28 novembre (16-17, 1 ora)

Esercizi dal Foglio 3.

Mercoledì 29 novembre (9-11, 2 ore)

Esempio importante: $\mathbb{R}$ quozientato per l'azione di $\mathbb{Z}$ per traslazione è S^1 .

Teo: la mappa quoziente per l'azione di un gruppo è aperta. Se il gruppo è finito è anche chiusa.

Prop: Sia G è un gruppo che agisce sullo spazio topologico X e X sia T2. Supponiamo che esista $A \subseteq X$ aperto tale che

(i) $\pi: A \rightarrow X/G$ è suriettiva;

(ii) l'insieme $\{g \in G \mid A \cap g \cdot A \neq \emptyset\}$ ha cardinalità finita.

Allora X/G è T2.

Mercoledì 29 novembre (14-16, 2 ore)

Esercizi dal Foglio 3.

Giovedì 30 novembre (9-11, 2 ore)

Connessione: definizione e proprietà equivalenti. Primi esempi. Sottospazi connessi.

Teo: $[0, 1]$ con la topologia euclidea è connesso.

Teo: immagine tramite continua di connessi è connesso.

Definizione di arco tra due punti di uno spazio topologico. Definizione di connessione per archi.

Teo: uno spazio connesso per archi è connesso.

Martedì 5 dicembre (16-17, 1 ora)

Esercizi dal Foglio 3 e 4.

Verifica che la connessione è una proprietà topologica.

Mercoledì 6 dicembre (9-13, 4 ore)

Lemma: X spazio topologico $A \subseteq X$ aperto e chiuso. $Y \subseteq X$ connesso. Allora $Y \subseteq A$ oppure $Y \subseteq X \setminus A$. Intervalli di $\mathbb{R}$. Teo: dato $I \subset \mathbb{R}$ sono equivalenti: 1) I è un intervallo 2) I è connesso 3) I è connesso per archi.

Lemma: sia X uno spazio topologico $Y \subseteq X$ un connesso e sia W tale che $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$. Allora Y è connesso.

Lemma: l'unione di una famiglia di connessi che contengono un punto è connessa.

Definizione di sottoinsieme convesso e stellato di $\mathbb{R}^n$. Verifica che sono connessi.

Teo: sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici con Y connesso e $f^{-1}(y)$ connesso per ogni $y \in Y$. Se f è aperto o chiusa allora X è connesso.

Teo: prodotto di spazi connessi è connesso.

Definizione di componente connessa.

Esempio: $[a, b]$, $[a, b)$ e $(a, b]$ sono tutti non omeomorfi tra loro.

Teo: per ogni punto di uno spazi topologico esiste un'unica componente connessa che lo contiene. Le componenti connesse inoltre sono chiuse.

Esempio: Le componenti connesse di $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sono i punti (e non sono aperti).

Definizione di componente connessa per archi.

Esercizi dal Foglio 4.

Giovedì 7 dicembre (2 ore- Bianchi)

Definizione di concatenazione di cammini e di cammino inverso.

Esempio di sottospazio di $\mathbb{R}^2$ connesso ma non connesso per archi: la pulce e il pettine (ref: Kosniowski)

Mercoledì 13 dicembre (9-11- 2 ore)

Definizione di ricoprimento e sottoricoprimento di un insieme e di un sottoinsieme. Ricoprimento aperto.

Definizione di compattezza. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ non è compatto.

Teo: immagine tramite continua di compatti è compatta.

Cor: la compattezza è una proprietà topologica.

Teo: $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ è compatto con la topologia euclidea.

Teo: chiuso in un compatto è compatto. Compatto in un T2 è chiuso. Unione finita di compatti è compatto.

Cor: compatto in $\mathbb{R}$ se e solo se chiuso e limitato.

Mercoledì 13 dicembre (14-16- 2 ore)

Lemma: le componenti connesse sono aperte se e solo se ogni punto contiene un aperto connesso.

Teo: uno aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

Definizione di proprietà dell'intersezione finita (Manetti esercizio 4.25).

Prop: uno spazio topologico è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

Uno spazio discreto è compatto se e solo se è finito.

Giovedì 14 dicembre (9-11- 2 ore)

Teo: dato uno spazio topologico X e una sua base. Sono equivalenti: X è compatto e ogni ricoprimento di X composto di elementi della base possiede un sottoricoprimento finito.

Prop: Un'applicazione continua da un compatto a uno spazio di Hausdorff è chiusa.

Teo: Il prodotto di due spazi topologici compatti è compatto.

Per la dimostrazione abbiamo usato il Lemma del Tubo.

Teo: sia $f: X \rightarrow Y$ mappa quoziente; X compatto e T2. Sono equivalenti:

- (1) Y è T2;
- (2) f è chiusa;
- (3) $K = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$ è chiuso in $X \times X$.

Martedì 19 dicembre (16-17, 1 ora)

Mercoledì 20 dicembre (9-11, 2 ore)

Teo: data un'applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ che sia chiusa con Y compatto e con fibra compatta, vale che X è compatto.

Prop: X, Y spazi topologici, X compatto. Allora la proiezione sul secondo fattore $q: X \times Y \rightarrow Y$ è chiusa.

Quindi abbiamo una dimostrazione alternativa del fatto che se X e Y sono compatti allora il loro prodotto lo è.

Cor: Un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Cenni al prodotto arbitrario di spazi topologici. Enunciato del Teorema di Tychonoff senza dimostrazione.

Def. spazio topologico secondo-numerabile o a base numerabile.

Def. Spazio topologico separabile.

Esempi

Lemma: secondo numerabile $\Rightarrow$ separabile.

Lemma: metrizzabile + separabile $\Rightarrow$ secondo-numerabile.

Osservazione: ne deriva che la retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non è metrizzabile.

Prop (Teorema di Lindeloff): Se X è secondo numerabile ogni suo ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento numerabile.

Mercoledì 20 dicembre (14-16, 2 ore)

Def. Spazio primo-numerabile.

Esempi.

Oss: primo e secondo numerabile e separabile sono proprietà topologiche.

Es: prodotto di due spazi primo numerabili (risp. secondo numerabili, risp. separabili) è primo numerabile (risp. secondo numerabile, risp. separabile).

Es: secondo-numerabile $\Rightarrow$ primo numerabile.

Esempio di quoziente di $\mathbb{R}$ che non è primo numerabile.

Esercizi.

Giovedì 21 dicembre (9-11, 2 ore)

Successioni in uno spazio topologico. Esempi. Unicità del limite in spazi T2. Def. di punto di accumulazione per una successione. Definizione di sottosuccessione.

Lemma: Sia $\{a_n\}$ una successione. Se $\{a_n\}$ possiede una sottosuccessione convergente a p allora p è di accumulazione per $\{a_n\}$.

Prop: X primo-numerabile, $S \subseteq X$, $x \in X$. Sono equivalenti:

- 1) esiste una successione a valori in S che converge a x ;
- 2) x è punto di accumulazione per una successione a valori in S ;
- 3) $x \in \overline{S}$.

Prop: in uno spazio topologico compatto ogni successione possiede punti di accumulazione.

Def. di compatto per successioni.

Prop: primo-numerabile + compatto $\Rightarrow$ compatto per successioni.

Prop: X secondo-numerabile. Sono equivalenti: (1) X compatto; (2) ogni successione in X possiede punti di accumulazione; (3) X compatto per successioni.

Def. e prima proprietà di successioni di Cauchy in spazi metrici. Def. spazio metrico completo.

Teo: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ con la metrica euclidea sono completi.

Def. di spazio totalmente limitato.

Lemma: compatto per successioni $\Rightarrow$ totalmente limitato.

Lemma: totalmente limitato $\Rightarrow$ secondo-numerabile.

Lemma: totalmente limitato $\Rightarrow$ ogni successione possiede una sottosuccessione di Cauchy.

Teo: X spazio metrico. Sono equivalenti: (1) X compatto (2) ogni successione in X possiede punti di accumulazione (3) X compatto per successioni (4) X completo e totalmente limitato.

Mercoledì 10 gennaio (9-11, 2 ore)

Introduzione alla Topologia Algebrica.

Definizione di omotopia tra funzioni continue. Esempi: tutte le funzioni continue tra uno spazio qualsiasi e un sottospazio convesso di $\mathbb{R}^n$ sono omotope. Definizione di omotopia relativa a un sottospazio.

Esercizi.

Definizione di equivalenza omotopica tra spazi topologici. Esempi: Due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti. Esempio: D^2 è omotopicamente equivalente a un punto.

Tutti i sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$, per ogni n , sono omotopicamente equivalenti a un punto.

Mercoledì 10 gennaio (14-16, 2 ore)

Definizione di spazio contraibile (o contrattile).

Prop: X contraibile è connesso per archi.

Oss: vedremo nelle prossime ore che invece S^1 è connesso per archi ma non contraibile.

Es: ogni sottospazio stellato di $\mathbb{R}^n$ è contraibile.

Es: uno spazio X è contraibile se e solo se id_X è omotopa a una costante.

Esercizio: ogni retratto in un T_2 è chiuso.

Esercizio: X contraibile è connesso per archi.

Esercizio: uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio connesso per archi è connesso per archi.

Giovedì 11 gennaio (9-11, 2 ore). Equivalenza di cammini (notazione $\alpha \sim \beta$). Definizione ed esempi.

Prodotto sulle classi di equivalenza di cammini. Proprietà. Discussione su: cosa manca per farlo diventare un gruppo?

Dato $x_0 \in X$ chiamo ϵ_x il cammino costante in x_0 . Sia α cammino tra x e y in uno spazio topologico X .

Lemma 1: Vale che $\alpha \star \epsilon_y \sim \epsilon_x \star \alpha \sim \alpha$.

Lemma 2: Vale che $\alpha \star \bar{\alpha} \sim \epsilon_x$ e $\bar{\alpha} \star \alpha \sim \epsilon_y$.

Definizione di gruppo fondamentale o gruppo di Poincarè $\pi_1(X, x_0)$. Verifica che è un gruppo.

Martedì 16 gennaio (16-18, 2 ore).

Esercizio: se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso, per ogni $x_0 \in X$ $\pi_1(X, x_0) = \{[\epsilon_{x_0}]\}$.

Teo: Dato γ cammino in X tra x e y , definito $\mu_\gamma: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ come $\mu_\gamma([\alpha]) = [\bar{\gamma} \star \alpha \star \gamma]$, μ_γ è un isomorfismo di gruppi.

Definizione di spazio semplicemente connesso.

Gruppi fondamentali e mappe continue: l'omomorfismo indotto. Proprietà di funtorialità dell'omomorfismo indotto.

Teorema: (15.12 Kosniowski): mappe omotope danno luogo ad omomorfismi corrispondenti (modulo un isomorfismo).

Teorema: Se X e Y sono spazi topologici omotopicamente equivalenti allora i gruppi fondamentali sono omeomorfi.

Osservazione: il gruppo fondamentale è dunque un invariante omotopico.

Mercoledì 17 gennaio (11-13, 2 ore) Esercitazioni (Bianchi)

Giovedì 26 gennaio (9-11, 2 ore). Esercitazioni (Bianchi)