Geometria I- Diario delle lezioni

L. Stoppino, Università dell'Insubria, a.a. 2018/2019

Lunedì 24 settembre (14-17, 3 ore).

Introduzione del corso.

Spazi metrici: Definizione ed esempi (metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$, metrica discreta).

Aperti negli spazi metrici. Verifica che le bolle sono aperte.

Gli aperti rispetto a una metrica sono tutte e sole le unioni di bolle.

Equivalenza tra metriche. Equivalenza topologica: due metriche $d$, $d'$ su un insieme $X$ si dicono topologicamente equivalenti se inducono la stessa topologia.

Limitazione standard di una metrica.

Verifica che equivalenti $\Rightarrow$ topologicamente equivalenti ma che il viceversa non vale. (Ref. Manetti 3.1 e 3.4)

Continuità in un punto.

Teorema: una funzione $f\colon X \to Y$ tra due spazi metrici è continua se e solo se la controimmagine di aperti in $Y$ è aperta in $X$.

Prop: una funzione $f\colon X \to Y$ tra due spazi metrici è continua in $x_0 \in X$ se e solo se la controimmagine di intorni di $f(x_0)$ è un intorno di $x_0$.

Proprietà degli insiemi aperti.

Definizione di spazio topologico.

Primi esempi: topologia discreta e topologia concreta

Topologia indotta da una metrica: spazi metrizzabili.

Esercizi: 1) Le bolle in uno spazio metrico sono aperte. 2) Enumerazione delle topologie su un insieme con 3 elementi. 3) L'unica topologia metrizzabile su uno spazio finito è quella discreta.

Martedì 25 settembre (10-13, 3 ore).

Definizione di spazio topologico.

Altri esempi: topologia euclidea su $\mathbb{R}$; topologia della semicontinuità inferiore su $\mathbb{R}$. Topologia cofinita. Verifica che la cofinita è una topologia.

Chiusi di uno spazio topologico. Proprietà.

Topologie confrontabili, più o meno fini.

L'intersezione di topologie è una topologia: topologia generata da una famiglia di sottoinsiemi. (ref. Manetti 3.1).

Definizione di *base* di una topologia.

Esercizi.

Martedì 2 ottobre (10-13, 3 ore).

*Base* di una topologia. Esempi (bolle aperte per uno spazio metrico, i singoletti sono una base per la topologia discreta, esempi su uno spazio con tre elementi).

Teorema della base (quando una famiglia di aperti puo' essere base di una topologia: Teorema 3.7 del Manetti).

Esempio importante: retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$.

Esercizio: Verifica che la topologia $\mathcal{T}_S$ è strettamente più fine di quella euclidea $\mathcal{T}_e$ e strettamente meno fine di quella discreta $\mathcal{D}$.

Definizione di spazio di Hausdorff o T2.

Esercizi: verifica che $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ è di Hausdorff, che i punti sono chiusi, che $(0,1)$ non è chiuso (ma è aperto).

Metrizzabile $\Rightarrow T2$.

Definizioni di intorni. Un sottoinsieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.

La famiglia degli intorni di un punto $x$ è chiusa per estensione ed intersezione finita

Esiste per gli intorni l'analogo del concetto di base.

Def. di base locale/sistema fondamentale di intorni di $x \in X$.

Es: data una base $\mathcal{B}$, per ogni $x \in X$ l'insieme $\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ è un sistema fondamentale di intorni di $x$.

Lunedì 8 ottobre (14-17, 3 ore)

Parte interna e chiusura di un sottoinsieme. Definizione e prime proprietà. Esempi. (Ref. Manetti 3.1 e 3.2).

Classificazione dei punti rispetto ad un sottoinsieme $S$: punti interni, esterni, di frontiera.

Lemma: sia B un sottoinsieme di uno spazio topologico $X$. Allora un punto $x \in X$ appartiene a $\overline{B}$ se e solo se per ogni intorno $U \in I(x)$ vale $U \cap B \neq \emptyset$.

Lemma: Per ogni $A, B \subseteq X$ vale che $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ e che $\overline{A} \cap \overline{B} \supseteq \overline{A \cap B}$, e questa seconda inclusione può essere stretta. Affermazione analoga con le parti interne.

Definizioni ed esempi di sottospazi densi. Esempi importanti: densità di $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$. Densità in spazi discreti e in spazi concreti.

Esercizi su parte interna e chiusura (dal foglio1)

Martedì 9 ottobre (10-13, 3 ore)

Definizione di continuità ed esempi. Discussione sulla continuità dell'applicazione identica.

Lemma: $f \colon X \to Y$ continua se e solo se per ogni $S \subseteq X$ $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$.

Teo: composizione di applicazioni continue è una applicazione continua.

Definizione di continuità in un punto.

Teo: $f$ è continua se e solo se è continua in ogni punto.

Def: applicazioni aperte e chiuse.

Lemma: data $f \colon X \to Y$ biiettiva sono equivalenti:

- $f$ è aperta;
- $f$ è chiusa.

Lemma: data $f\colon X \to Y$ biiettiva sono equivalenti:

- $f$ è continua;
- l'inversa di $f$ è aperta;
- l'inversa di $f$ è chiusa.

Lemma: data una applicazione $f\colon X \to Y$ tra spazi topologici sono equivalenti:

- $f$ è un omeomorfismo;
- $f$ è continua biunivoca e aperta;
- $f$ è continua biunivoca e chiusa.

Definizione di omeomorfismo. Definizione di spazi omeomorfi. Essere omeomorfi è una relazione di equivalenza.

Esercizi su continuità.

<u>Lunedì 15 ottobre (14-17, 3 ore)</u>

Topologia di sottospazio. Esempio: il caso degli spazi metrici.

Prop: se $A \subseteq Y$ e $Y \subseteq (X, \mathcal{T})$ allora la chiusura di $A$ in $Y$ (che denotiamo $\overline{A}^Y$) coincide con l'intersezione della chiusura di $A$ con $Y$.

Prop: siano $E \subseteq Y \subseteq X$. Allora

1. Se $Y$ è aperto in $X$ allora $E \subseteq Y$ è aperto in $Y$ se e solo se $E$ è aperto in $X$;
2. Se $Y$ è chiuso in $X$ allora $E \subseteq Y$ è chiuso in $Y$ se e solo se $E$ è chiuso in $X$;
3. Se $Y$ è intorno di $y$ in $X$ allora $E$ è intorno di $y$ in $Y$ se e solo se è intorno di $y$ in $X$.

Sottospazi discreti. Esercizi sui sottospazi discreti.

Data un'applicazione da un insieme $X$ a uno spazio topologico $(Y, \mathcal{S})$, definizione della topologia generata $f^{-1}\mathcal{S}$ su $X$.

Più in generale, definizione della topologia indotta su un insieme $X$ da una famiglia di applicazioni $f_\alpha\colon X \longrightarrow Y_\alpha$, con $Y_\alpha$ spazio topologico.

Teorema: sia $\varphi\colon (Z, \mathcal{T}) \to (X, f^{-1}\mathcal{S})$. Allora $\varphi$ è continua se e solo se $f \circ \varphi$ è continua.

Esercizi dal foglio 1.

<u>Martedì 16 ottobre (10-13, 3 ore)</u>

Definizione di immersione. Esempi, esempi di applicazioni iniettive e continue che non sono immersioni.

Lemma: Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua.

- Se $f$ è iniettiva e aperta, è un'immersione aperta.
- Se $f$ è iniettiva e chiusa è un'immersione chiusa.

Proiezione stereografica: definizione, calcolo esplicito in coordinate e dimostrazione che per ogni $P \in S^n$ esiste un omeomorfismo tra $S^n \setminus \{P\}$ ed $\mathbb{R}^n$.

Definizione di omeomorfismo locale. Esempi. Esempio importante: mappa esponenziale $\mathbb{R} \to S^1$.

Esercizi dal Foglio 1.

Lunedì 22 ottobre (14-17, 3 ore)

Definizione di topologia prodotto. Base canonica per la topologia prodotto.

Teo: le proiezioni sono aperte (ma non sempre chiuse: controesempio); un'applicazione in uno spazio prodotto è continua se e solo se lo sono le sue componenti; le fibre sono omeomorfe alle componenti.

Metriche sui prodotti di spazi metrici. Verifica che la topologia indotta dalla metrica prodotto è la topologia prodotto delle due topologie indotte sui fattori dalle due metriche di partenza.

Es: il prodotto di elementi di base è una base per la topologia prodotto. In particolare la topologia prodotto su $\mathbb{R}^n$ indotta dalla topologia euclidea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ è la topologia euclidea.

Esercizio illuminante: Verifica che in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ il sottospazio $R = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\}$ è discreto, mentre il sottospazio $T = \{(x, x) \in \mathbb{R}\}$ è omeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$.

Esercizi dal Foglio 2:

Martedì 23 ottobre (10-13, 3 ore)

Prop: sottospazi di T2 sono T2; il prodotto di spazi T2 è T2.

Teo: $X$ è T2 se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto.

Oss: essere T2 è una proprietà topologica.

Prop: siano $f, g \colon X \to Y$ funzioni continue da uno spazio topologico a uno spazio T2. Allora $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è un chiuso di $X$.

Prop: sia $f \colon X \to Y$ funzione continua da uno spazio topologico a uno spazio T2. Allora il grafico di $f$ è chiuso.

Assiomi di separazione T0, T1, T2, T3, T4 e relazioni tra di loro.

Spazi regolari, spazi normali.

Esercizi:

- Esempio di uno spazio che è T4 ma non T3, nè T2, nè T1, nè T0.
- Dimostrazione che un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta. (ref. 12.1 Manetti).

Lunedì 29 ottobre (14-17, 3 ore)

Spazi quoziente.

Definizione di topologia indotta $\mathcal{T}_f$ da una mappa $f \colon (X, \mathcal{T}_X) \to Y$ e prime proprietà (in particolare verifica che è la più fine topologia che rende continua $f$).

Definizione di sottoinsiemi saturi. Verifica che un sottoinsieme $B \subset Y$ è aperto se e solo se è immagine di un aperto saturo $A$ di $X$.

Osservazione: non è vero in generale che $f$ è aperta nè chuisa.

Esempio importante: $e \colon [0, 1] \to S^1$ definita da $e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ è un'identificazione chiusa ma non aperta.

Teorema: (proprietà universale dello spazio quoziente): Siano $X$, $Z$ spazi topologici, $Y$ un insieme. Siano $f \colon X \to Y$, $g \colon Z \to Y$ applicazioni con $f$ suriettiva e $g$ continua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, "\exists h?"] \\ Z & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Allora esiste $h: (Y, \mathcal{T}_f) \to Z$ continua tale che $g = h \circ f$ se e solo se $g$ è costante sulle fibre di $f$. Inoltre, $h$ è aperta (risp. chiusa) se $g$ è aperta (risp. chiusa).

Martedì 30 ottobre (10-13, 3 ore)

Osservazione importante: ogni relazione di equivalenza $\sim$ su un insieme $X$ corrisponde ad un'opportuna applicazione suriettiva da $X$ e viceversa. Data una relazione di equivalenza su uno spazio topologico chiamiamo spazio quoziente $X/\sim$ l'insieme delle classi di equivalenza con la topologia quoziente indotta dall proiezione al quoziente $\pi: X \to X/\sim \pi(x) = [x]$.

Cor (della proprietà universale della topologia quoziente): se $\sim$ è una relazione di equivalenza sullo spazio topologico $X$ e $\pi: X \to X/\sim$ è la proiezione sul quoziente, data $g: Z \to X/\sim$ applicazione continua da uno spazio topologico $Z$. Allora esiste $\tilde{g}: X/\sim \to Z$ continua tale che $g = h \circ \pi$ se e solo se $g$ è costante sulle classi di equivalenza di $\sim$. Inoltre $\tilde{g}$ è aperta (risp. chiusa) se $g$ lo è.

Se $S \subseteq X$, consideriamo la relazione di equivalenza: $x \sim x'$ sse $x = x'$ oppure $x, x' \in S$. Lo spazio quoziente $X/\sim = X/S$ si chiama contrazione di $S$ ad un punto. Esempi di contrazioni ad un punto.

Esercizio importante: la contrazione a un punto $[0,1]/\{0,1\} \sim S^1$.

Esempi importanti: cilindro, nastro di Möbius, bottiglia di Klein, spazio proiettivo reale come quozienti di figure piane con lati identificati.

Esercizio sulla topologia quoziente: la lingua biforcuta (Manetti esercizio 5.7).

Esercizio: la restrizione della mappa esponenziale $[0,1] \to S^1$ è un'identificazione chiusa. La restrizione a $[0,1) \to S^1$ non lo è.

Esercizio: Sia $Y$ lo spazio quoziente di uno spazio $X$ relativo ad una suriezione $f: X \to Y$. Vale che $C \subseteq Y$ è chiuso se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in $X$.

Esercizio: Nelle notazioni dell'esercizio precedente, un quoziente topologico è T1 se e solo se per ogni $p \in Y$ la fibra su $p$ $f^{-1}(p)$ è chiusa in $X$.

Lunedì 5 novembre (14-17, 2 ore)

Esercitazioni (Bianchi): esercizi dai Fogli 1,2,3

Martedì 6 novembre (10-13, 3 ore)

Azioni di gruppi su insiemi: richiami.

Azioni di gruppi su spazi topologici. Definizione e prime proprietà.

Esempio importante: $\mathbb{R}$ quozientato per l'azione di $\mathbb{Z}$ per traslazione è $S^1$.

Teo: la mappa quoziente per l'azione di una gruppo è aperta. Se il gruppo è finito è anche chiusa.

Prop: Sia $G$ è un gruppo che agisce sullo spazio topologico $X$ e $X$ sia T2. Supponiamo che esista $A \subseteq X$ aperto tale che

(i) $\pi: A \to X/G$ è suriettiva;

(ii) l'insieme $\{g \in G \mid A \cap g \cdot A \neq \emptyset\}$ ha cardinalità finita.

Allora $X/G$ è T2.

Cor: Se $G$ è un gruppo finito che agisce fedelmente su uno spazio di Hausdorff, allora il quoziente è di Hausdorff.

Cor: Sia $G$ un gruppo che agisce fedelmente su uno spazio topologico. Il quoziente è di Hausdorff se e solo se l'insieme

$$K = \{(x, g(x)) \in X \times X, x \in X, g \in G\}$$

è chiuso nel prodotto.

Esempio importante: $\mathbb{RP}^n$ è $S^n/\mathbb{Z}_2$, per un'opportuna azione di$\mathbb{Z}_2$.

Esercizio importante: definizione di figura di rotazione $R_F \subset \mathbb{R}^3$ di una figura piana $F \subset \{y = 0, x > 0\}$, e verifica che $R_F \sim F \times S^1$.

<u>Lunedì 12 novembre (14-17, 3 ore)</u>

Unione disgiunta di spazi topologici.

Connessione: definizione e proprietà equivalenti. Primi esempi. Sottospazi connessi.

Lemma: $X$ spazio topologico $A \subseteq X$ aperto e chiuso. $Y \subseteq X$ connesso. Allora $Y \subseteq A$ oppure $Y \subseteq X \setminus A$.

Lemma: sia $X$ uno spazio topologico $Y \subseteq X$ un connesso e sia $W$ tale che $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$. Allora $Y$ è connesso.

Lemma: l'unione di una famiglia di connessi che contengono un punto è connessa.

Teo: $[0, 1]$ con la topologia euclidea è connesso.

Teo: immagine tramite continua di connessi è connesso.

Verifica che la connessione è una proprietà topologica.

Definizione di arco tra due punti di uno spazio topologico. Definizione di connessione per archi.

Teo: uno spazio connesso per archi è connesso.

Esempio di sottospazio di $\mathbb{R}^2$ connesso ma non connesso per archi: la pulce e il pettine (ref: Kosniowski).

Definizione di sottoinsieme convesso e stellato di $\mathbb{R}^n$. Verifica che sono connessi.

Intervalli di $\mathbb{R}$. Teo: dato $I \subset \mathbb{R}$ sono equivalenti: 1) $I$ è un intervallo 2) $I$ è connesso 3) $I$ è connesso per archi.

Martedì 13 novembre (10-13, 3 ore)

Teo: sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici con $Y$ connesso e $f^{-1}(y)$ connesso per ogni $y \in Y$. Se $f$ è aperto o chiusa allora $X$ è connesso.

Cor: prodotto di spazi connessi è connesso.

Definizione di componente connessa.

Esempio: $[a, b]$, $[a, b)$ e $(a, b]$ sono tutti non omeomorfi tra loro.

Teo: per ogni punto di uno spazi topologico esiste un'unica componente connessa che lo contiene. Le componenti connesse inoltre sono chiuse.

Esempio: Le componenti connesse di $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sono i punti (e non sono aperti).

Definizione di componente connessa per archi.

Esempi: Componenti connesse e connesse per archi di $\mathbb{Q}$. Componenti connesse e connesse per archi della pulce e il pettine.

Lemma: le componenti connesse sono aperte se e solo se ogni punto contiene un aperto connesso.

Teo: un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

Esercizi dal Foglio 4:

- $X$ e $Y$ sono connessi per archi se e solo se il loro prodotto è cpa.

Lunedì 19 novembre (14-17, 3 ore)

Definizione di ricoprimento e sottoricoprimento di un insieme e di un sottoinsieme. Ricoprimento aperto.

Definizione di compattezza. Esempio: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ non è compatto.

Esempio: uno spazio concreto è sempre compatto; uno spazio di cardinalità finita è sempre compatto; uno spazio discreto è compatto se e solo se è finito.

Teo: dato uno spazio topologico $X$ e una sua base. Sono equivalenti: $X$ è compatto e ogni ricoprimento di $X$ composto di elementi della base possiede un sottoricoprimento finito.

Teo: immagine tramite continua di compatti è compatta.

Cor: la compattezza è una proprietà topologica.

Teo: $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ è compatto con la topologia euclidea.

Teo: (i) Chiuso in un compatto è compatto. (ii) Compatto in un T2 è chiuso. (iii) Unione finita di compatti è compatto.

Cor: Compatto in $\mathbb{R}$ se e solo se chiuso e limitato.

Prop: Un'applicazione continua da un compatto a uno spazio di Hausdorff è chiusa. Dunque in particolare un'applicazione continua e suriettiva da un compatto a un T2 è un'identificazione chiusa.

Teo: Il prodotto di due spazi topologici compatti è compatto.

Per la dimostrazione abbiamo usato il Lemma del Tubo. La referenza più vicina alla nostra trattazione è Munkres, Cap. 3, Sez. 5.

Esercizio: sia $f\colon X \to Y$ mappa quoziente; $X$ compatto e T2. Sono equivalenti:

(1) $Y$ è T2;

(2) $f$ è chiusa;

(3) $K = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$ è chiuso in $X \times X$.

Esercizio: la pulce e il pettine non è connessa per archi.

Martedì 20 novembre (10-13, 3 ore)

Teo: data un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ che sia chiusa con $Y$ compatto e con fibra compatta, vale che $X$ è compatto.

Prop: $X, Y$ spazi topologici, $X$ compatto. Allora la proiezione sul secondo fattore $q\colon X \times Y \to Y$ è chiusa.

Quindi abbiamo una dimostrazione alternativa del fatto che se $X$ e $Y$ sono compatti allora il loro prodotto lo è.

Cor: (Heine-Borel)Un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Enunciato del Teorema di Tychonoff senza dimostrazione.

La compattificazione a un punto o compattificazione di Alexandroff $\hat{X}$.

Proprietà (è T2 se e solo se $X$ è T2 e ogni punto possiede un intorno compatto prop. 4.65, e poi prop. 4.66 del Manetti).

Esercizio: Definizione di proprietà dell'intersezione finita (Manetti esercizio 4.25).

Prop: uno spazio topologico è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

Esercizi dal Foglio 4.

Martedì 27 novembre (10-13, 3 ore)

Esercitazioni Bianchi: esercizi dal Foglio 4.

Lunedì 3 dicembre (14-17, 3 ore)

Def. spazio topologico secondo-numerabile o a base numerabile.

Def. Spazio topologico separabile.

Esempi

Lemma: secondo numerabile $\Rightarrow$ separabile.

Lemma: metrizzabile + separabile $\Rightarrow$ secondo-numerabile.

Osservazione: ne deriva che la retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non è metrizzabile.

Prop (Teorema di Lindeloff): Se $X$ è secondo numerabile ogni suo ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento numerabile.

Def. Spazio primo-numerabile.

Esempi.

Oss: primo e secondo numerabile e separabile sono proprietà topologiche.

Es: prodotto di due spazi primo numerabili (risp. secondo numerabili, risp. separabili) è primo numerabile (risp. secondo numerabile, risp. separabile).

Es: se uno spazio prodotto $X \times Y$ av e primo numerabile (risp. secondo numerabile, risp. separabile) allora $X$ e $Y$ sono primo numerabile (risp. secondo numerabile, risp. separabile).

Es: non è detto che un sottospazio di uno spazio separabile sia separabile.

Es: secondo-numerabile $\Rightarrow$ primo numerabile.

Esempio di quoziente di $\mathbb{R}$ che non è primo numerabile (Es. 6.1 Manetti).

Esercizi dal foglio 4.

Martedì 4 dicembre (10-13, 3 ore)

Successioni in uno spazio topologico. Esempi. Unicità del limite in spazi T2. Def. di punto di accumulazione per una successione. Definizione di sottosuccessione.

Lemma: Sia $\{a_n\}$ una successione. Se $\{a_n\}$ possiede una sottosuccessione convergente a $p$ allora $p$ è di accumulazione per $\{a_n\}$.

Prop: $X$ primo-numerabile, $S \subseteq X$, $x \in X$. Sono equivalenti:

1) esiste una successione a valori in $S$ che converge a $x$;

2) $x$ è punto di accumulazione per una successione a valori in $S$;

3) $x \in \overline{S}$.

Prop: in uno spazio topologico compatto ogni successione possiede punti di accumulazione.

Def. di compatto per successioni.

Prop: primo-numerabile + compatto $\Rightarrow$ compatto per successioni.

Prop: $X$ secondo-numerabile. Sono equivalenti: (1) $X$ compatto; (2) ogni successione in $X$ possiede punti di accumulazione; (3) $X$ compatto per successioni.

Def. e prima proprietà di successioni di Cauchy in spazi metrici. Def. spazio metrico completo.

Teo: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ con la metrica euclidea sono completi.

Def. di spazio totalmente limitato.

Lemma: compatto per successioni $\Rightarrow$ totalmente limitato.

Lemma: totalmente limitato $\Rightarrow$ secondo-numerabile.

Lemma: totalmente limitato $\Rightarrow$ ogni successione possiede una sottosuccessione di Cauchy.

Teo: $X$ spazio metrico. Sono equivalenti: (1) $X$ compatto (2) ogni successione in $X$ possiede punti di accumulazione (3) $X$ compatto per successioni (4) $X$ completo e totalmente limitato.

Esercizi dal Foglio 4.

Lunedì 10 dicembre (14-17, 3 ore)

Introduzione alla Topologia Algebrica.

Definizione di omotopia tra funzioni continue. Proprietà.

Esempi: tutte le funzioni continue tra uno spazio qualsiasi e un sottospazio convesso di $\mathbb{R}^n$ sono omotope. Definizione di omotopia relativa a un sottospazio.

Definizione di equivalenza omotopica tra spazi topologici. Definizione di invariante omotopico.

Esempi: Due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti.

Esempio: $D^2$ è omotopicamente equivalente a un punto (ma non ad esso omeomorfo).

Prop: Tutti i sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$, per ogni $n$, sono omotopicamente equivalenti a un punto.

Definizione di spazio contraibile (o contrattile).

Prop: $X$ contraibile è connesso per archi.

Oss: vedremo nelle prossime ore che invece $S^1$ è connesso per archi ma non contraibile.

Definizione di retrazione. Definizione di retrazione di deformazione. Esempi.

Esercizio: ogni retratto in un T2 è chiuso.
Esercizio: $X$ contraibile è connesso per archi.
Esercizio: uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio connesso per archi è connesso per archi.

Martedì 11 dicembre (10-13, 3 ore)

Definizione di retrazione forte e debole di deformazione. Esempi.

Equivalenza di cammini (notazione $\alpha \sim \beta$). Definizione ed esempi.

Prodotto sulle classi di equivalenza di cammini. Proprietà. Discussione su: cosa manca per farlo diventare un gruppo?

Dato $x_0 \in X$ chiamo $\epsilon_x$ il cammino costante in $x_0$. Sia $\alpha$ cammino tra $x$ e $y$ in uno spazio topologico $X$. Prodotti di cammini. (notazione $\alpha \star \beta$). Definizione ed esempi. Cammino inverso ad un cammino $\alpha$: $\overline{\alpha}(t) := \alpha(1-t)$.

Lemma 1: se $\alpha, \beta, \gamma$ sono cammini compatibili, vale che $\alpha \star (\beta \star \gamma) \sim (\alpha \star \beta) \star \gamma$.

Lemma 2: Vale che $\alpha \star \epsilon_y \sim \epsilon_x \star \alpha \sim \alpha$.

Lemma 3: Vale che $\alpha \star \overline{\alpha} \sim \epsilon_x$ e $\overline{\alpha} \star \alpha \sim \epsilon_y$.

Definizione di gruppo fondamentale o gruppo di Poincarè $\pi_1(X, x_0)$. Verifica che è un gruppo.

Esercizio: se $\pi_1(S^1, 1) \cong \{[\epsilon_1]\}$ allora ogni spazio topologico puntato avrebbe gruppo fondamentale banale.

Lunedì 17 dicembre (14-17, 3 ore)

Esercitazioni (Bianchi)

Martedì 18 dicembre (10-13, 3 ore)

Teo: Il gruppo fondamentale della circonferenza è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione.

Teorema di sollevamento delle mappe $f: I \to S^1$.

Teorema di sollevamento delle omotopie.

Conseguenza: definizione della funzione "grado" di un cammino chiuso in $S^1$ puntato in 1.

Verifica che è un isomorfismo.

Definizione di rivestimento.

Teo: Dato $\gamma$ cammino in $X$ tra $x$ e $y$, definito $\mu_\gamma: \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$ come $\mu_\gamma([\alpha]) = [\overline{\gamma} * \alpha * \gamma]$, $\mu_\gamma$ è un isomorfismo di gruppi.

Corollario: in uno spazio cpa la classe di isomorfismo del gruppo fondamentale non dipende dal punto base scelto.

<u>Lunedì 7 gennaio (14-17, 3 ore)</u>

Gruppi fondamentali e mappe continue: l'omomorfismo indotto. Proprietà di funtorialità dell'omomorfismo indotto.

Esercizio importante: se $Y \subseteq X$ è un retratto di $X$ allora $i_*$ è iniettiva e $r_*$ è suriettiva.

Esercizio: la circonferenza $S^1$ non è retratto del disco $D \subset \mathbb{R}^2$.

Teorema: (15.12 Kosniowski): mappe omotope danno luogo ad omomorfismi corrispondenti (modulo un isomorfismo).

Teorema: Se $X$ e $Y$ sono spazi topologici omotopicamente equivalenti allora i gruppi fondamentali sono isomorfi.

Osservazione: il gruppo fondamentale è dunque un invariante omotopico.

Definizione di spazio semplicemente connesso.

Corollario: (ma si dimostra facilmente anche direttamante) se uno spazio è contraibile allora è semplicemente connesso.

<u>Martedì 8 gennaio (10-13, 3 ore)</u>.

Esercizio importante: il gruppo fondamentale di uno spazio prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali.

La semplice connessione di $S^2$: perché la dimostrazione non è ovvia: la curva di Peano nella formalizzazione di Hilbert (referenza: Munkres, Topology).

Teorema del numero di Lebesgue.

Teorema (Van-Kampen baby) Sia $X$ spazio topologico e siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due suoi aperti tali che $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Sia $x_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, e siano $i_*: \pi_1(\mathcal{U}, x_0) \to \pi_*(X, x_0)$ e $j_*: \pi_1(\mathcal{V}, x_0) \to \pi_*(X, x_0)$ gli omomorfismi indotti dalle inclusioni $i: \mathcal{U} \hookrightarrow X$ e $j: \mathcal{V} \hookrightarrow X$. Se $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ sono connessi per archi, allora il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ è generato dalle immagini di $i_*$ e $j_*$.

Oss: la connessione per archi di $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ è necessaria: controesempio di $S^1$.

Corollario: se $X$ è unione di sue aperti semplicemente connessi tali che l'intersezione è connessa per archi, allora $X$ è semplicemente connesso.

Corollario: la sfera $S^n$ per $n \geq 2$ è semplicemente connessa.

Esercizio: $S^n$ è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$.

Martedì 15 gennaio (16-18, 2 ore).

Esercizio: Verifica che il toro bucato si retrae di deformazione forte sull'otto $S^1 \wedge S^1$. Discussione sui generatori del gruppo fondamentale del toro.

Esercizio: il gruppo fondamentale di $\mathbb{RP}^2$ è $\mathbb{Z}/2$.

Esercizio: verifica che $(-1, 1)$ è un retratto debole di deformazione di $[-1, 1]$, ma non una suo retratto.

Definizione di gruppo topologico. Dimostrazione che un gruppo topologico ha gruppo fondamentale abeliano.

Lunedì 21 gennaio (9-11, 3 ore) Esercitazioni Bianchi: risoluzione Esercizi di Natale.