<u>ESERCIZI di NATALE</u>

A. Cattaneo, L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2016/17

1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}$ una sua partizione in sottoinsiemi disgiunti.
   (a) Mostra che $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$ è base per una topologia su X.
   (b) Mostra che un sottoinsieme S di X è aperto se e solo se è chiuso.
   (c) Considera le due partizioni $\mathcal{P}_1 = \{X\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{\{x\} | x \in X\}$ e descrivi le topologie associate ad esse.
   (d) La topologia associata ad una partizione $\mathcal{P}$ diversa da $\mathcal{P}_1$ e da $\mathcal{P}_2$ è T_0?
   (e) Data $\mathcal{P}$ qualsiasi, sia $\sim_{\mathcal{P}}$ la relazione di equivalenza su X descritta da
   $$x \sim_{\mathcal{P}} y \Longleftrightarrow \text{ esiste } I \in \mathcal{P} \text{ tale che } x, y \in I.$$
   Descrivi lo spazio topologico quoziente $X/\sim_{\mathcal{P}}$.

2. Sia $X = [-1, 1]$ dotato della topologia τ generata dagli insiemi della forma $[-1, b)$ con $b > 0$ e $(a, 1]$ con $a < 0$. Mostra che:
   (a) la topologia τ è (strettamente) meno fine della topologia euclidea e una sua base è data dagli insiemi $[-1, b)$, $(a, 1]$ e (a, b) con $a < 0 < b$;
   (b) con questa topologia, $[-1, 1]$ è compatto, connesso e 2-numerabile;
   (c) la topologia τ è T_0 ma non T_1

3. Sia (X, d) il piano $\mathbb{R}^2$ dotato dell'usuale metrica euclidea. Definiamo
   $$\begin{array}{rccc} d^* : & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } P = Q \\ d(O, P) + d(O, Q) & \text{se } P \neq Q. \end{cases} \end{array}$$
   Mostra che:
   (a) d^* è una metrica su X;
   (b) la topologia indotta da questa metrica su $X \smallsetminus \{O\}$ è quella discreta;
   (c) la topologia indotta da questa metrica su X rende X non compatto né separabile;
   (d) le bolle aperte centrate in O sono anche chiuse.

4. Dimostrare che uno spazio X omotopicamente equivalente ad uno spazio Y connesso (risp. connesso per archi) è connesso (risp. connesso per archi). È vero che uno spazio omotopicamente equivalente ad uno spazio compatto è compatto?