Esercizi di Natale

2018-2019

Soluzioni

Geometria 1

Lidia Stoppino

1

1) (a) Falso: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x$

f è lineare ma non è chiusa:

ad esempio $C = \{(x,y) \text{ tc } xy = 1\}$

è luogo degli zeri di funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g(x,y) = xy - 1$ che è continua

dunque è chiuso: $C = g^{-1}(\{0\})$ e $0 \in \mathbb{R}$ è chiuso.

ma $f(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che non è chiuso in $\mathbb{R}$

(b) Falso

Basta prendere una inclusione di un aperto che non è chiuso.

Prendo $(\mathbb{R}, \tau_e)$ $\qquad (0,1) \xhookrightarrow[i]{} \mathbb{R}$

i è aperta ma non è chiusa

e i è iniettiva e continua.

(c) Falso

l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ del punto (a)

è aperta perché proiezione dello spazio prodotto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sul primo fattore

ma abbiamo appena visto che non è chiusa.

(d) vero Sia $f : X \to Y$ biiettiva e aperta

$C \subseteq X$ chiuso in X $\iff$ $X \setminus C$ aperto in X

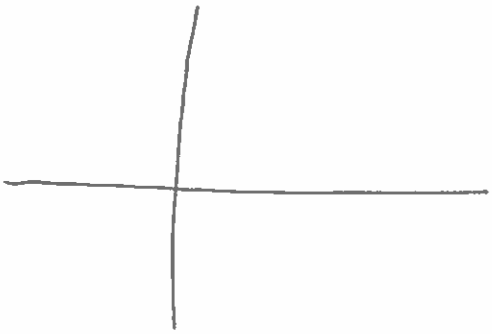
$f(X \setminus C)$ dunque è aperto in Y ma

$f(X \setminus C) \overset{f \text{ iniettiva}}{=} f(X) \setminus f(C) \overset{f \text{ suriettiva}}{=} Y \setminus f(C) \Rightarrow f(C)$ chiuso in Y.

ESERCIZI DI Natale 2018/19 - Esercizio 2: soluzioni

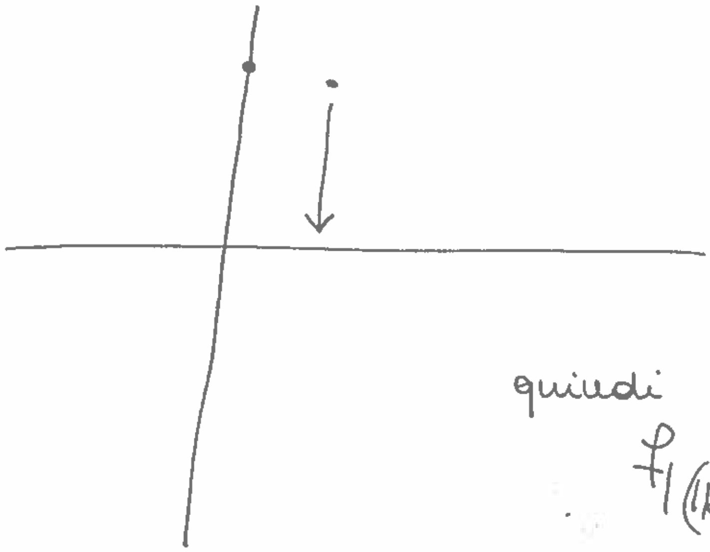
$X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \}$ = asse x $\cup$ asse y =

$= (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$



$f : \mathbb{R}^2 \to X$ così definita

$$f((x,y)) = \begin{cases} (x,0) & \text{se } x \neq 0 \\ (0,y) & \text{altrimenti} \end{cases}$$



quindi

$f|_{(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}}$ = proiezione ortog. sull'asse x = $P_1(x,y) = (x,0)$

$f|_{\{0\}\times\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\{0\}\times\mathbb{R}}$

τ_f = topologia quoziente indotta da f con τ_e su $\mathbb{R}^2$ =

$= \{ U \subseteq X \text{ tc } f^{-1}(U) \in \tau_e \}$

(a) $f:(\mathbb{R}^2,\tau_e)\to(X,\tau_e|_X)$ è continua?

Sia $\mathcal{B}=\{(a,b)\times(c,d)\ ,\ a<b,\ c<d\ ,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$

è una base per τ_e su $\mathbb{R}^2$ (perchè è il prodotto di basi su $(\mathbb{R},\tau_e^1)$ e $\tau_e=\tau_e^1\times\tau_e^2$ top. prodotto)

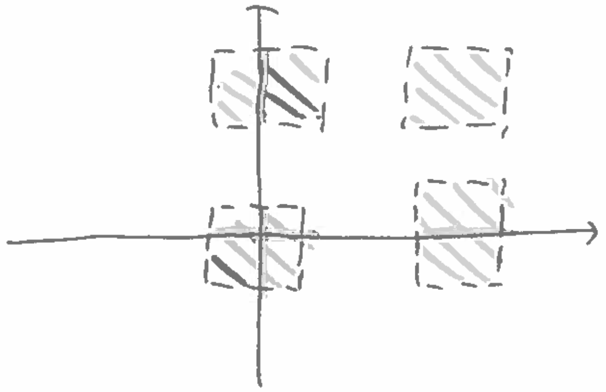
Dunque l'insieme

$$\mathcal{B}|_X := \{((a,b)\times(c,d))\cap X\ ,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\ ,\ a<b,\ c<d\}$$

è una base per $\tau_e|_X$.

Ora:

$$((a,b)\times(c,d))\cap X = \underbrace{\begin{cases} ((a,b)\times\{0\})\cup(\{0\}\times(c,d)) & \text{se } 0\in(a,b),\ 0\in(c,d)\\ (a,b)\times\{0\} & \text{se } 0\notin(a,b),\ 0\in(c,d) \\ \{0\}\times(c,d) & \text{se } 0\in(a,b)\ \ 0\notin(c,d)\\ \emptyset & \text{altrimenti}\end{cases}}_{\circledast}$$



se considero in particolare $\{0\}\times(2,3)\in\tau_e|_X$

$$f^{-1}(\{0\}\times(2,3))=\{0\}\times(2,3)\notin\tau_e$$

quindi f con le topologie scelte non è continua.

Ora ricordo che $\tau_f=\{V\in X \ \text{ tc } \ f^{-1}(V)\in\tau_e\}$

dunque $\{0\}\times(2,3)\notin\tau_f$

quindi $\underbrace{\tau_e|_X\not\subseteq\tau_f}$

Ora dimostro che vale l'altra inclusione. Dunque $\tau_e|_X$ e τ_f sono confrontabili e

τ_f è strettamente meno fine di $\tau_e|_X$

4

<u>claim</u> $\tau_f \subseteq \tau_e$

lo dimostro in <u>due modi</u>:

1) $\tau_f = \{ f(U) \text{ tc } U \in \tau_e \text{ è un aperto saturo} \}$

<u>saturo</u>: $f^{-1}(f(U)) = U$

vediamo quali sono gli aperti saturi: prima di tutto vediamo in generale gli insiemi saturi:

$S \subseteq \mathbb{R}^2$ saturo sse $f^{-1}(f(S)) = S$

dunque $S = (A \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times B)$ con

$A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$

questo deriva dalla definizione di f: $\left(\begin{array}{l} f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}}(x,y) = p(x,y) \overset{''}{=} (x,0) \\ f|_{\{0\}\times\mathbb{R}} = id_{\{0\}\times\mathbb{R}} \end{array} \right)$

<u>ho che</u>: $f(S) = (A \times \{0\}) \cup (\{0\} \times B)$ con $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f^{-1}(f(S)) = p_r^{-1}(A \times \{0\}) \cup id^{-1}(\{0\} \times B) =$$
$$= (A \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times B)$$

ora, mi devo chiedere quali di questi insiemi è aperto per τ_e

$$A \times \mathbb{R} \subseteq \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{aperto in } \mathbb{R}} \times \mathbb{R}$$

quindi $A \times \mathbb{R}$ è aperto se e solo se <u>A è aperto in $\mathbb{R}$</u>

inoltre $\{0\} \times B$ deve essere aperto in $\{0\} \times \mathbb{R}$ con $\tau_e / \{0\} \times \mathbb{R}$

quindi B deve essere aperto in $\mathbb{R}$

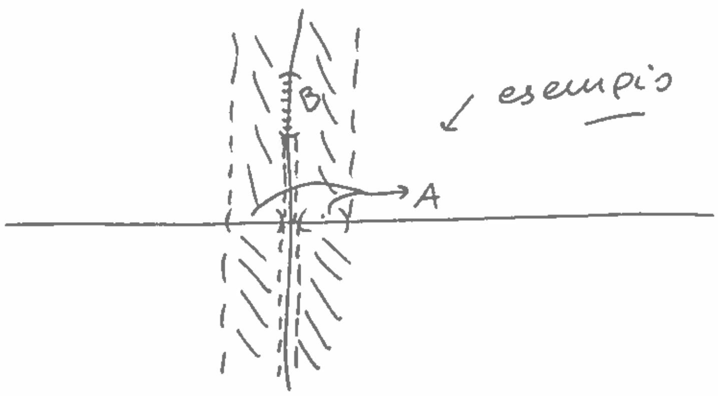
In più se $B \neq \emptyset$ $\quad \{0\} \times B \subseteq \underbrace{(A \times \mathbb{R})}_{\text{e questo è aperto}} \cup (\{0\} \times B)$

dunque $\exists \varepsilon > 0$ tc <u>$(-\varepsilon, 0) \cup (0, +\varepsilon) \subseteq A$</u>

Riassumendo gli aperti saturi sono tutti e soli gli unioni delle forma

$$(A\times\mathbb{R})\cup(\{0\}\times B) \quad \text{con}$$

- A, B aperti in $\mathbb{R}$, $A\subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- se $B\neq\emptyset$ $\exists\,\varepsilon>0$ tc $(-\varepsilon,0)\cup(0,\varepsilon)\subseteq A$



ora, l'immagine V di un tale unione è

$$f((A\times\mathbb{R})\cup(\{0\}\times B)) = \begin{cases} A\times\{0\} & \text{se } B=\emptyset \\ & \text{(con } A\subseteq\mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ aperto)} \\ (A\times\{0\})\cup(\{0\}\times B) & \text{con } (-\varepsilon,0)\cup(0,\varepsilon)\subseteq A \\ \text{se } B\neq\emptyset & \text{per qualche } \varepsilon>0 \end{cases}$$

In ogni caso $f((A\times\mathbb{R})\cup(\{0\}\times B))\in \tau_e|_X$. ⊠

2) osserviamo che

$$f:(\mathbb{R}^2,\tau_e)\longrightarrow(X,\tau_e|_X) \text{ è aperta;}$$

Infatti, basta controllare che data una base $\mathcal{B}$ per τ_e su $\mathbb{R}^2$, $\forall B\in\mathcal{B}$ $f(B)\in\tau_e|_X$

(infatti se $U\in\tau_e$ è aperto qualsiasi $\exists\, B_\alpha\in\mathcal{B}$ tc $U=\bigcup_\alpha B_\alpha$, allora $f(U)=\bigcup_\alpha \underbrace{f(B_\alpha)}$
se sono aperti la loro unione è aperta)

Considero la base

$$\mathcal{B} = \{ (a,b) \times (c,d) \ , a<b, \ c<d \}$$

$$f(\underbrace{(a,b)\times(c,d)}_{\overset{\shortparallel}{B}}) = P\Big(\big((\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}\big)\cap B\Big) \cup id\Big((\{0\}\times\mathbb{R})\cap B\Big) =$$

$$= \begin{cases} \big((a,b)\setminus\{0\}\big)\times\{0\}\big) \cup \big(\{0\}\times(c,d)\big) & \text{se } (a,b)\ni 0 \\ \big((a,b)\setminus\{0\}\big)\times\{0\} & \text{se } (a,b)\not\ni 0 \end{cases}$$

in ogni caso $f(B) \in \tau_e|_X$ (si vede ✪)

Quindi ho che

$\forall\, \mathcal{V} \in \tau_f$ per definizione $f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau_e$

ma $\underset{\mathcal{V}}{\underset{\shortparallel}{f(f^{-1}(\mathcal{V}))}} \in \tau_e|_X$ per quanto appena verificato.

f suriettiva

Dunque $\underline{\tau_f \subseteq \tau_e|_X}$ ⊠

(b) (X, τ_f) è T2 ?

In (1) abbiamo scritto esplicitamente gli aperti saturi di τ_e rispetto ad f

siano $(0, y_1)$, $(0, y_2)$ due punti distinti sull'asse y

siano V_1, V_2 intorni aperti di $(0, y_1)$ e $(0, y_2)$ rispettivamente.

siano $U_i = f^{-1}(V_i)$ gli aperti saturi di $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$ corrispondenti

per quanto osservato $\exists\, \varepsilon_i > 0$ tale che

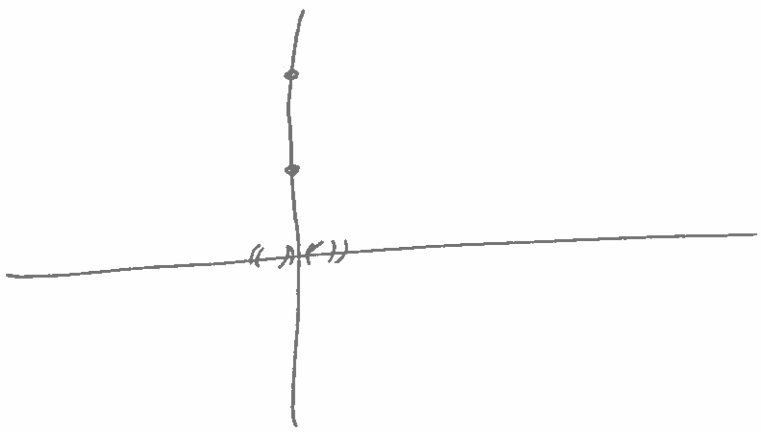
$$((-\varepsilon_i, 0) \cup (0, \varepsilon_i)) \times \{0\} \subseteq U_i \qquad i = 1, 2$$

ma allora

$$V_i = f(U_i) \supseteq ((-\varepsilon_i, 0) \cup (0, \varepsilon_i)) \times \{0\}$$

$$\Rightarrow \quad V_1 \cap V_2 \supseteq (-\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, +\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}) \neq \emptyset$$

quindi non esistono intorni aperti disgiunti di questi due punti $\Rightarrow$ lo spazio non è T2



3) (a) Sia $(X, \mathcal{D}_X)$ con $|X| = n < +\infty$ $\mathcal{D}_X = \mathcal{P}(X)$

$\hat{X}$ compattificazione di Alexandroff

$$\hat{X} = X \cup \{\infty\}$$

con $\tau_{\hat{X}} := \mathcal{D}_X \cup \{ Y \cup \{\infty\} \mid X \setminus Y \text{ compatto in } X \}$ $Y \subseteq X$

ora, ogni $Z \subseteq X$ è compatto in X, perché $|Z| \leq |X| < +\infty$ e ogni spazio finito è compatto (<u>ogni</u> ricoprimento di uno spazio finito <u>è</u> già finito) (anche non aperto)

quindi

$$\tau_{\hat{X}} = \mathcal{D}_X \cup \{ Y \cup \{\infty\},\ Y \in \mathcal{D}_X \} =$$

$$= \mathcal{P}(\hat{X}) \qquad \boxed{\text{OK}}$$

(b) considero $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$. Ad esempio

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{\infty\} \notin \tau_{\hat{\mathbb{R}}}$$

perché

$\mathbb{N}$ non è compatto in $\mathbb{R}$

infatti $\{x\}_{x \in \mathbb{N}}$ è un suo ricoprimento aperto infinito ($\{x\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{D}_{\mathbb{N}}$) che <u>non</u> ammette sottoricoprimenti.

(4)(a)

se X è totalmente connesso e $|X| > 1$

$\exists\, x, y \in X$ con $x \neq y$ $\{x\}$ e $\{y\}$ sono due componenti connesse distinte di X $\Rightarrow$ X ha più di una componente connessa $\Rightarrow$ X è sconnesso.

(4)(b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è sconnesso ma le sue componenti connesse $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ non sono punti.

(4)(c) $(\mathbb{R}, \tau_S)$ è totalmente sconnesso.

Sia $Y \subseteq \mathbb{R}$ un insieme con più di un elemento: $x, y \in S$ con $x < y$

$$\mathbb{R} = \underbrace{(-\infty, y]}_{\in\, \tau_S} \cup \underbrace{(y, +\infty)}_{\in\, \tau_S}$$

$$Y = \mathbb{R} \cap Y = \Big(\underbrace{(-\infty, y] \cap S}_{\ni\, x}\Big) \cup \Big(\underbrace{(y, +\infty] \cap S}_{\ni\, y}\Big)$$

ho scritto Y come unione disgiunta di due suoi aperti non vuoti: $(Y, \tau_{S|_Y})$ è sconnesso.

(4)(d)

X spazio topologico

Definisco relazione di equivalenza:

$$x \sim y \quad \text{sse} \quad x \text{ e } y \text{ appartengono alla stessa componente connessa di } X$$

Come al solito chiamo $C(x)$ componente connessa di X che contiene $x \in X$

$$x \sim y \quad \text{sse} \quad C(x) = C(y)$$

Considero $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ mappa quoziente associata

$$x \longmapsto [x]$$

$$\pi^{-1}([x]) = C(x)$$

Voglio vedere che $X/\sim$ è totalmente sconnesso.

Sia $Y \subseteq X/\sim$ insieme di cardinalità > 1:

$\exists \ [x], [y] \in Y$ con $[x] \neq [y]$

Dimostro che Y è sconnesso:

considero $\pi^{-1}(Y) \subseteq X$

$$C(x) \subseteq \pi^{-1}(Y) \quad \text{e} \quad C(y) \subseteq \pi^{-1}(Y)$$

dunque $\pi^{-1}(Y)$ è sconnesso

Sia $A \subseteq \pi^{-1}(Y)$ un aperto e chiuso proprio in $\pi^{-1}(Y)$.

osservo che A è saturo infatti $\forall [z] \in Y$

$\pi^{-1}([z]) = C(z)$

$\pi^{-1}([z]) \cap A = C(z) \cap A$ è aperto e chiuso in $C(z)$

$$\Rightarrow \qquad \left(C(z) \cap A = \begin{cases} C(z) \\ \text{oppure} \\ \emptyset \end{cases} \right.$$

quindi $\quad A = \pi^{-1}(\pi(A))$

quindi $\quad \pi(A) \subseteq Y$

è aperto e chiuso in Y

(perché immagine di un aperto saturo e chiuso)

e $\pi(A)$ è proprio

infatti (è $\neq \emptyset$ e) se $\pi(A) = \pi(Y)$ allora

$$\underline{A = \pi^{-1}(Y)}$$

$\Rightarrow$ $\underline{Y \text{ è sconnesso}}$. $\boxtimes$

---

(4) (e) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ è totalmente sconnesso, infatti

$\forall S \subseteq \mathbb{R}$ con $|S| > 1$

Dato $x \in S$ $\qquad S = (S \setminus \{x\}) \cup \{x\}$

aperti in S non vuoti

dunque S è sconnesso.

D'altra parte

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \forall U \in \mathcal{J}(x)$ se prendo $\{x\}$

$\{x\} \in \mathcal{J}(x)$ e $\{x\} \subseteq U$ e $\{x\}$ è ovviamente connesso.