Risoluzione esercizi del compito del 22 febbraio 2019
di Geometria 1 - Lidia Stoppino -

1) [vero o falso]

(a) Quoziente di un compatto è compatto. VERO

un quoziente di uno spazio topologico X è uno spazio topologico Y tale che $\exists\, f: X \to Y$ suriettiva e continua con $\tau_Y = f_* \tau_X = \{ V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \tau_X \}$

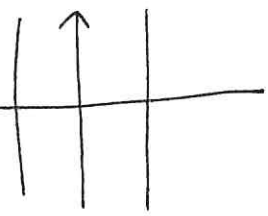
Sappiamo che $^{(*)}$ immagine tramite continue di un compatto è compatto. Quindi basta osservare che $f(X)$ in questo caso è Y.

[OSS: se qualcuno vuole dimostrare (*) va benissimo. Deve però dimostrarlo giusto!]

(b) Quoziente di un T2 è T2. Falso:

prendiamo per esempio la lingua biforcuta:

$X = \{x=1\} \cup \{x=-1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (ovviamente X è T2 essendo sottospazio di $\mathbb{R}^2$)



$Y := X/\sim$ dove $(x,y) \sim (x',y')$

se e solo se $\begin{cases} (x,y) = (x',y') \text{ oppure} \\ \{x, x'\} = \{\pm 1\} \text{ e } y<0 \end{cases}$

allora $p = [(1,0)] \neq [(-1,0)] = q$ per def, ma

$\forall\, U \ni p \ \ \forall\, V \ni q$ aperti in $X/\sim$

ho che date $\pi: X \longrightarrow X/\sim$ proiezione al quoziente,

$\pi^{-1}(U)$ è aperto in X che contiene $(1,0)$

$\pi^{-1}(V)$ " " " " " $(-1,0)$

e dunque $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $\{1\} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \pi^{-1}(U)$

e $\{-1\} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \pi^{-1}(V)$

$\Rightarrow \ \pi(\pi^{-1}(U)) \cap \pi(\pi^{-1}(V)) \supseteq \{ [(1,y)] \ y \in (-\varepsilon, 0) \} \neq \emptyset$

quindi $X/\sim$ non è T2

Altro controesempio ancora più semplice:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}/_{[0,1)}$ = contrazione a un punto di $S=[0,1)$

$\mathbb{R}$ è T2 (ovviamente con τ_e) ma $\mathbb{R}/_{[0,1)}$ non è neanche T1:

infatti $p = [\,[0,1)\,]$ non è chiuso in $\mathbb{R}/_{[0,1)}$.

T2 $\Rightarrow$ T1 quindi $\mathbb{R}/_{[0,1)}$ non è T2.

(c) La contrazione a un punto di un sottospazio compatto di uno spazio T2 è T2 - <u>vero</u>:

sia X spazio T2; sia $K \subseteq X$ compatto in X

$X/_K$ contrazione a un punto di K è

$$X/_K := X/_{\sim_K} \quad \text{dove} \quad x \sim_K x' \text{ se } \begin{cases} x = x' \\ \text{oppure} \\ x, x' \in K \end{cases}$$

$\pi : X \to X/_K$ mappa quoziente.

se considero due punti $p, q \in X/_K$ diversi da $r = [K]$

ho $\pi^{-1}(p) = \{p'\}$ $\pi^{-1}(q) = \{q'\}$

e in X, essendo T2 $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ aperti tali che $p' \in \mathcal{U}$, $q' \in \mathcal{V}$

e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

allora considero $K \subseteq X$: è chiuso perché compatto in T2 $\Rightarrow$ chiuso

dunque $\mathcal{U} \setminus K$ e $\mathcal{V} \setminus K$ sono ancora intorni aperti di p' e q' (risp.)

e $\pi(\mathcal{U} \setminus K)$ e $\pi(\mathcal{V} \setminus K)$ sono <u>aperti</u> disgiunti

che contengono risp. p e q. (perché $\mathcal{U} \setminus K$ e $\mathcal{V} \setminus K$ sono <u>saturi</u>)

considero ora $p \neq r$ in $X/_K$

dico che in X esistono $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ aperti tali che

$$\mathcal{U} \supseteq \underset{\pi^{-1}(r)}{\overset{\shortparallel}{K}}, \quad \mathcal{V} \ni \pi^{-1}(p) = p' \quad \text{e} \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$$

so che $\forall\, k \in K$ $\exists\, \mathcal{U}_k \ni k$ ed $\exists\, \mathcal{V}_k \ni p'$ aperti in X

tali che $\mathcal{U}_k \cap \mathcal{V}_k = \emptyset$

dunque $\{\mathcal{U}_k\}_{k \in K}$ è un ricoprimento aperto del compatto K - Estraggo sottoricoprimento finito: $\mathcal{U}_{k_1}, \dots \mathcal{U}_{k_n}$

ora

$$\bigcap_{i=1}^{s} V_{k_i} =: V \text{ è intorno aperto di } p'$$

$$\bigcup_{i=1}^{s} U_{k_i} =: U \text{ è aperto che contiene } K$$

e $V \cap U \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{s} V_{k_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{s} U_{k_i}\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{k_i} \cap U_{k_i} = \emptyset$

ora basta osservare che tali U e V sono saturi rispetto a π:

$\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ e $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$

e dunque $\pi(U)$ e $\pi(V)$ sono intorni aperti disgiunti di r e di p (risp).

(d) La contrazione ad un punto di un chiuso di un T2 è T2 [questo esercizio non l'ho contato nella valutazione; ho aumentato il punteggio degli altri]

FALSO

Consideriamo

$(\mathbb{R}, \tau_S) \times (\mathbb{R}, \tau_S) = \mathbb{R}^2$ con la topologia prodotto indotta dalla retta di Sorgenfrey su entrambi i fattori

Questo spazio è T2 perchè è prodotto di $(\mathbb{R}, \tau_S)$ che è T2.

Considero il sottospazio $\{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\} =: D$

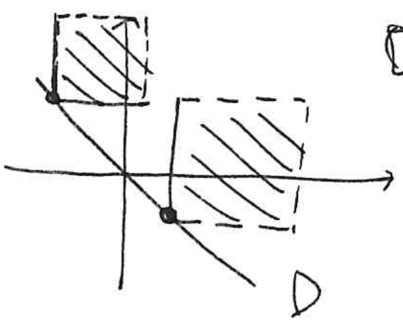
La topologia indotta su D è quella discreta, infatti

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\left([x, x+\varepsilon) \times [-x, -x+\varepsilon)\right)$ è aperto per $(\mathbb{R}^2, \tau_S \times \tau_S)$

considero $\varepsilon > 0$

e

$[x, x+\varepsilon) \times [-x, -x+\varepsilon) \cap D = \{(x,-x)\}$



[questo l'abbiamo visto in classe]

Considero ora

$$W := \{(x,-x),\ x \in \mathbb{Q}\} \subseteq D$$

Osservo che D è chiuso in $(\mathbb{R}^2, \tau_s \times \tau_s)$
(infatti, D è chiuso in $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$ e $\tau_e \subseteq \tau_s \times \tau_s$ (strettamente in realtà))

e W è chiuso in D perché la topologia su D è discreta

Ne segue che W è chiuso in $(\mathbb{R}^2, \tau_s \times \tau_s)$

però se prendo un punto $(\bar{x}, -\bar{x}) \in D \setminus W$
(cioè $(\bar{x}, -\bar{x})$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

non esistono $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ aperti in $(\mathbb{R}^2, \tau_s \times \tau_s)$ tali che

$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, $(\bar{x}, -\bar{x}) \in \mathcal{U}$, e $W \subseteq \mathcal{V}$

infatti se $\underset{\mathcal{U}}{\overset{(\bar{x},\bar{x})}{\cap}}$ è aperto in $(\mathbb{R}^2, \tau_s \times \tau_s)$, allora
$\exists$ elemento della base canonica tutto contenuto in $\mathcal{U}$ che contiene $(\bar{x}, -\bar{x})$: $\exists \varepsilon > 0$ tc

$$[\bar{x}, \bar{x}+\varepsilon) \times [-\bar{x}, -\bar{x}+\varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$$

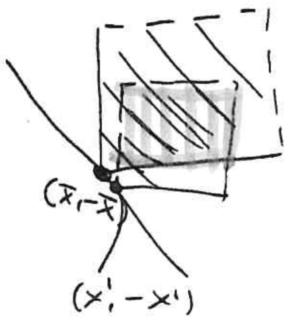
Ma allora se prendo

$x' \in \mathbb{Q} \cap (\bar{x}, \bar{x}+\varepsilon)$

allora $(x', -x') \in W$

e $\forall \mathcal{V}$ aperto che contenga $(x', -x')$ $\exists \delta > 0$ tale che

$$[x', x'+\delta) \times [-x', -x'+\delta) \subseteq \mathcal{V}$$



allora

$$\underbrace{[\bar{x}, \min\{\bar{x}+\varepsilon, x'+\delta\}) \times [-\bar{x}', \min\{-\bar{x}+\varepsilon, -x'+\delta\})}_{\neq\, \emptyset}$$

$$\cap\!|$$

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$$

NB l'idea qui è la seguente: nella dimostrazione del punto precedente (c) è fondamentale trovare due aperti U, V in X che separino K e $x \notin K$.
In effetti, vale che se $S \subseteq X$ è un sottoinsieme

X/S è T2 $\iff \forall x \notin S \;\exists\, U, V$ aperti con $U \supseteq S$ e $V \ni x$ t.c. $U \cap V = \emptyset$

(la dimostrazione è immediata)

Quindi per fare un controesempio in (d) devo cercare uno spazio T2 che non sia T3 e poi contrarre uno dei chiusi per cui non vale la condizione T3

6

2) $X = \{a, b, c, d\}$

$\tau = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{c\}, X, \emptyset\}$

(a) è una topologia su X: I. $X, \emptyset \in \tau$ OK

II OSS siccome $|X| = 4 < +\infty$ basta controllare che τ sia chiusa per $\cup$ di due elementi; inoltre controllo solo gli elementi di τ che non sono contenuti uno nell'altro: (se no $Y \subseteq Z \Rightarrow Y \cup Z = Z$)

$\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \in \tau$

$\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\} \in \tau$

$\{a, b\} \cup \{c\} = \{a, b, c\} \in \tau$ fine delle verifiche del II

III Di nuovo controllo le $\cap$ di due elementi di τ che non siano uno incluso nell'altro (se no $Y \subseteq Z \Rightarrow Y \cap Z = Y$)

$\{a\} \cap \{c\} = \emptyset \in \tau$

$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \in \tau$ OK

$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset \in \tau$

L'unica topologia metrizzabile su un insieme finito è la topologia discreta. Infatti, sia X finito, d metrica su X: sia $\varepsilon := \min\{d(x, y),\ x, y \in X \text{ con } x \neq y\}$

$\varepsilon > 0$ perché è min di un insieme finito di reali > 0 —

Dunque $\forall x \in X$ $B_\varepsilon(x) = \{x\}$ per def di ε

$\Rightarrow \tau_d = \mathcal{D}$.

Quindi τ, non essendo discreto, (ad esempio $\{b\} \notin \tau$) non è metrizzabile.

(b) $E_1 = \{d\}$ $E_2 = \{a, d\}$ $E_3 = \{a\}$

Dato $S \subseteq X$ $\overline{S} := \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso in } X \\ C \supseteq S}} C$ $\mathring{S} := \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{ aperto} \\ A \subseteq S}} A$

chiusi in τ (complementari degli aperti)

$\{ \{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{d\}, \{a, b, d\}, \emptyset, X \}$

dunque $\overline{E_1} = \{d\}$ (E_1 è chiuso) $\mathring{E}_1 = \emptyset$

$\overline{E_2} = \{a, b, d\}$ $\mathring{E}_2 = \{a\}$

$\overline{E_3} = \{a, b, d\}$ $\mathring{E}_3 = \{a\}$ (E_3 è aperto)

(c) $(X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{D}_Y)$ $|Y| = 2$

Descrivere tutte le applicazioni continue da (X, τ) in $(Y, \mathcal{D}_Y)$ con $|Y| = 2$ $Y = \{x, y\}$

Qui l'unica osservazione da fare è che X è connesso: infatti ho enumerato i suoi aperti e chiusi e non ho aperti e chiusi propri. Se ho f continua da X connesso allora $f(X)$ è connesso. Ma Y non è connesso dunque per forza $f(X) \subseteq$ componente connessa di Y ma le componenti connesse di Y sono $\{x\}$ e $\{y\}$: esistono esattamente due applicazioni continue da (X, τ) in $(Y, \mathcal{D}_Y)$:

$$f_x : X \longrightarrow Y \qquad f_x = \text{costante} = x$$
$$z \longmapsto x$$

$$f_y : X \longrightarrow Y \qquad f_y = \text{costante} = y$$
$$z \longmapsto y$$

Ho usato ovviamente che le costanti sono sempre continue.

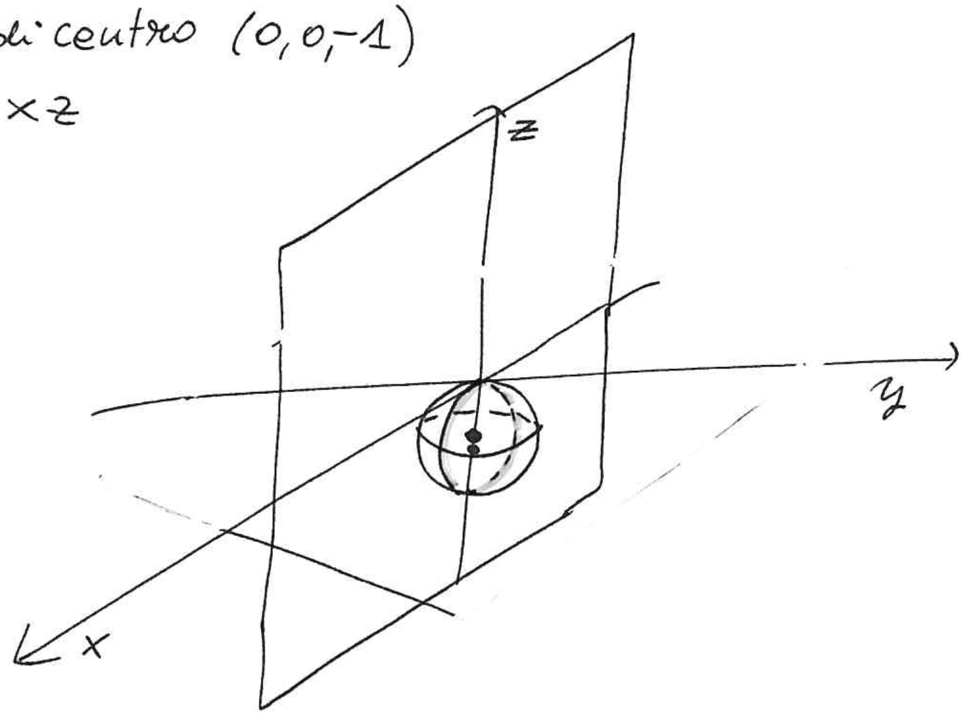
3) $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y(x^2+y^2+z^2+2z) = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+(z+1)^2=1\}$

$= \{\underbrace{\text{piano } xz}_{\Pi}\} \cup S = \Pi \cup S$

S sfera di centro $(0,0,-1)$

Π piano xz



oss: $\Pi \cap S = \{(x,0,z) \mid x^2+(z+1)^2=1\} \underset{\text{omeo}}{\sim} S^1$

(a)

Π è connesso per archi, infatti $\Pi \sim \mathbb{R}^2$

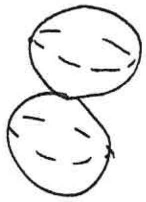
S è connesso per archi infatti $S \sim S^2$

$\Pi \cap S \neq \emptyset \Rightarrow \Pi \cup S$ è connesso per archi.

(b) $\pi_1(X, x_0) = ?$

<u>Idea</u>: X è piano $\cup$ sfera

questo (contraendo il piano Π) è omotopicamente equivalente a

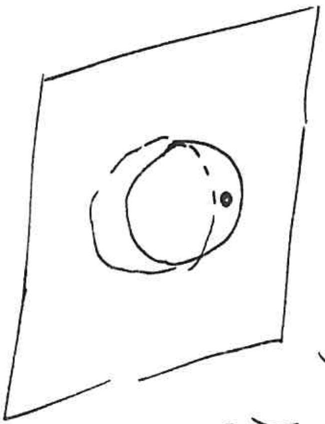


due sfere attaccate in un punto (il bouquet di due sfere)

e quindi sarà semplicemente connesso.

Dimostrare questa idea per bene può essere complicato, ma posso usare direttamente <u>van Kampen</u> con $\mathcal{U} = X \setminus \{(0,1,-1)\}$ e $\mathcal{V} = X \setminus \{(0,-1,-1)\}$

se guardo $\mathcal{U}$, vedo che la calotta

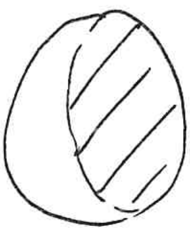


$\{y \geq 0\} \cap S$ si retrae di def su $\Pi \cup (\{y \leq 0\} \cap S)$

mentre $\mathcal{V}$ si retrae di def su $\Pi \cup (\{y \geq 0\} \cap S)$

anzi, $\mathcal{U}$ si retrae di def <u>su</u> $(\{y \leq 0\} \cap S) \cup \{\Pi \cap B\}$

dove $B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+(z+1)^2 \leq 1\}$



è la palla piena chiusa di raggio 1 e centro $(0,0,-1)$

ma $(\{y \leq 0\} \cap S) \cup (\Pi \cap B) \underset{\text{omeo}}{\simeq} S^2$

e $\mathcal{V}$ si retrae di def su

$(\{y \geq 0\} \cap S) \cap (\Pi \cap B) \simeq S^2$

ora U e V sono cpa

$U \cap V \neq \emptyset$ ed è cpa

quindi $\pi_1(X, x_0)$ è generato da

$\forall x_0 \in U \cap V$

$i_* \pi_1(U, x_0)$ e $J_* \pi_1(V, x_0)$

dove $i : U \hookrightarrow X$ e $J : V \hookrightarrow X$ sono le inclusioni

---

Ma abbiamo appena osservato che

U e V sono semplicemente connessi

(poiché si retraggono di deformazione

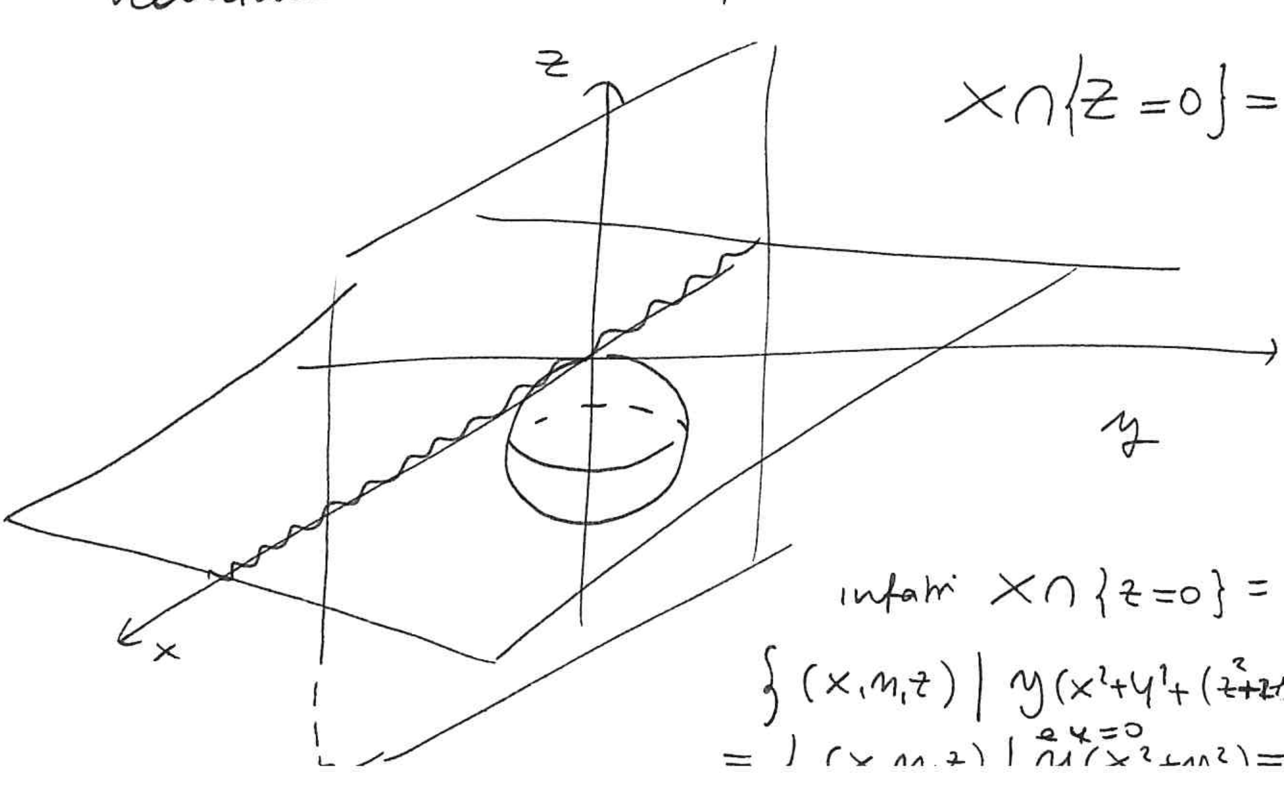
su degli spazi omeomorfi a S^2 che è

semplicemente connesso)

quindi $\underline{\pi_1(X, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}}$

(c) $Y = X \cap \{z=0\}$ $\quad Z = X \cap \{x=0\}$

vediamo come sono fatti:



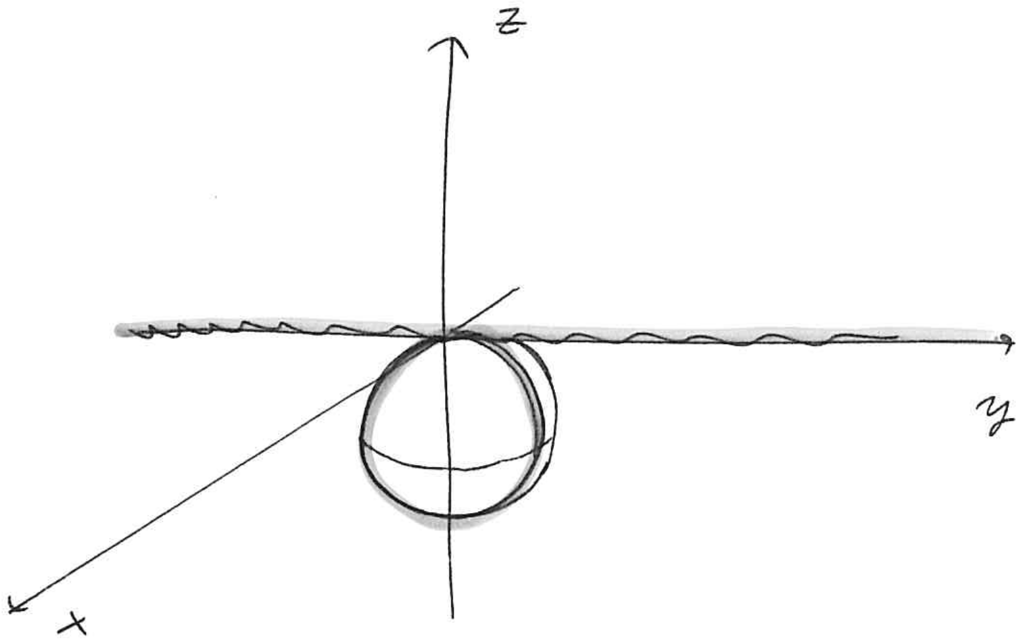
$X \cap \{z=0\} =$ asse x

infatti $X \cap \{z=0\} =$

$\{(x,y,z) \mid y(x^2+y^2+\cancel{z^2}+z^2)=0$ e $z=0\} =$

$= \{(x,y,z) \mid y(x^2+y^2)=0$ e $x=0\} = \{x=0$ e

$$X \cap \{x=0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y(x^2+y^2+z^2+2z)=0 \text{ e } x=0\}$$
$$= \{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y(y^2+z^2+2z)=0\}$$
$$= \{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y(y^2+(z+1)^2-1)=0\}$$



Attenzione: sappiamo che: $Y \subseteq X$ è retratto se $\exists r: X \to Y$ continua tale che $r|_Y = id_Y$

e sappiamo che se r è retrazione tra X e Y allora $\forall y_0 \in Y$ $r_*: \pi_1(X, y_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ è suriettiva (ovvero, chiamando $i: Y \hookrightarrow X$ l'inclusione, i_* è iniettiva)

Y è retratto di X: una retrazione è

$r: X \to Y$ $\quad r(x,y,z) = (x,0,0)$

osservo che

$$r|_Y \underbrace{(x,y,z)}_{\text{se } (x,y,z)\in Y \text{ è } (x,0,0)} = (x,0,0)$$ e r è continua ovviamente.

Z non è retratto di X.

Infatti, se lo fosse, avrei che $\forall z_0 \in Z$

$$i_*: \pi_1(Z, z_0) \longrightarrow \pi_1(X, z_0)$$

è iniettiva,

ma Z è $S^1 \cup \{\text{retta}\}$ con 1 punto di intersezione

e dunque si retrae di deformazione su S^1

Dunque $\pi_1(Z, z_0) \cong \mathbb{Z} \quad \forall z_0 \in Z$

mentre abbiamo appena visto che

$\pi_1(X, z_0)$ è banale.

$\Rightarrow$ Non può esserci una retrazione da X a Z.