

Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 15 febbraio 2018

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero dimostrate lo o spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

- (a) Ogni omeomorfismo è un'applicazione sia aperta sia chiusa;
- (b) ogni applicazione sia aperta sia chiusa è un omeomorfismo;
- (c) ogni applicazione chiusa e suriettiva è una mappa quoziente (una identificazione);
- (d) ogni applicazione biiettiva e chiusa possiede inversa continua;
- (e) ogni applicazione biiettiva e chiusa è anche aperta.

2. Sull'insieme dei naturali \mathbb{N} , si consideri la topologia \mathcal{T} generata dalla famiglia

$$\mathcal{F} = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}.$$

- (a) Si descriva \mathcal{T} .
- (b) \mathcal{F} è una base per \mathcal{T} ?
- (c) $(\mathcal{N}, \mathcal{T})$ è compatto?
- (d) $(\mathcal{N}, \mathcal{T})$ è metrizzabile?
- (e) $(\mathcal{N}, \mathcal{T})$ è confrontabile con quella euclidea?

3. Siano X e Y due spazi topologici, $X \times Y$ lo spazio prodotto.

- (a) Dimostrare che $X \times Y$ è connesso per archi se e solo se X e Y sono connessi per archi.
- (b) Dimostrare che $X \times Y$ è di Hausdorff se e solo se X e Y sono di Hausdorff.
- (c) Dimostrare che il prodotto di spazi semplicemente connessi è semplicemente connesso.