

# Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 1 febbraio 2019

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero dimostrate, se falso esibite un controesempio]

- (a) Un sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto. [3 punti]
- (b) Un sottospazio aperto di uno spazio compatto è compatto. [2 punti]
- (c) Un sottospazio compatto di uno spazio T2 è chiuso. [2,5 punti]
- (d) Un sottospazio compatto di uno spazio T1 è chiuso. [2,5 punti]
- (e) Un sottospazio compatto di uno spazio T0 è chiuso. [2,5 punti]

2. Sia  $X = \{a, b, c\}$  e consideriamo:

$$\mathcal{T}_X := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\} \subset \mathcal{P}(X).$$

- (a) Verificare che  $\mathcal{T}_X$  è una topologia su  $X$ . È metrizzabile? Dimostrate la vostra affermazione. [2,5 punti]
- (b) Calcolate la chiusura e la parte interna dei seguenti sottoinsiemi di  $X$  rispetto alla topologia  $\mathcal{T}_X$ :  $X$ ,  $\{a\}$ ,  $\{a, c\}$ . [2,5 punti]
- (c) Lo spazio  $(X, \mathcal{T}_X)$  è connesso? È connesso per archi? [3 punti]
- (d) Esiste un'identificazione  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$  (cioè un'applicazione suriettiva tale che  $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_f$ )? Se sì esibirla esplicitamente, se no, dimostrare che non esiste. [3 punti]

3. Sia  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$  la sfera. Sia  $r \subset \mathbb{R}^3$  la retta  $r: x - 1 = y = 0$ . Sia  $X := S^2 \cup r \subset \mathbb{R}^3$ , con la topologia indotta da quella euclidea.

- (a) Lo spazio  $X$  è connesso per archi? [2 punti]
- (b) Calcolare il gruppo fondamentale di  $X$ . [3,5 punti]
- (c) Il sottospazio  $Y := X \cap \{x + y - 1 = 0\}$  è un retratto di  $X$ ? [3,5 punti]