

Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 20 settembre 2018

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso (se vero dimostrare, se falso esibire un controesempio)
 - (a) Ogni sottospazio di uno spazio discreto è discreto. *[2 punti]*
 - (b) Il sottospazio $\{1/n, n \in \mathbb{N}^+\} \subset \mathbb{R}$ è discreto con la topologia euclidea. *[2 punti]*
 - (c) Ogni sottospazio discreto e chiuso in un compatto è un insieme finito. *[3 punti]*
 - (d) Ogni sottospazio di uno spazio compatto è compatto. *[2 punti]*
 - (e) Un sottospazio di cardinalità finita è sempre compatto in qualunque spazio topologico. *[2 punti]*

2. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione surriettiva tra spazi topologici.
 - (a) Definire la topologia quoziente su Y indotta da f , e verificare che è una topologia. *[2 punti]*
 - (b) Supponiamo che Y abbia la topologia quoziente indotta da f . Dimostrare che Y è T1 se e solo se fibre di f (cioè le controimmagini di punti) sono chiuse in X . *[3 punti]*
 - (c) Dimostrare che se f è continua e aperta allora Y ha la topologia quoziente su Y indotta da f . *[3 punti]*
 - (d) Un'applicazione quoziente è sempre aperta? *[3 punti]*

3. Siano X ed Y due spazi topologici, e siano $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.
 - (a) Definire il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$. *[1 punto]*
 - (b) Dimostrare che $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. *[3 punti]*
 - (c) Dimostrare che $X \times Y$ è semplicemente connesso se e solo se sia X sia Y lo sono. *[3 punti]*
 - (d) Fare un esempio di uno spazio topologico che ha gruppo fondamentale isomorfo a \mathbb{Z}^n , per ciascun $n \in \mathbb{N}^+$. *[3 punti]*