

Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 22 febbraio 2019

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero dimostrate o spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

- (a) Quoziente di un compatto è compatto; [3 punti]
- (b) Quoziente di uno spazio T2 è uno spazio T2; [3 punti]
- (c) La contrazione a un punto di un sottospazio compatto di uno spazio T2 è T2; [3,5 punti]
- (d) La contrazione a un punto di un sottospazio chiuso di uno spazio T2 è T2. [3,5 punti]

2. Sia X un insieme con 4 elementi: $X = \{a, b, c, d\}$. Sia \mathcal{T} la seguente collezione di sottonisemi:

$$\mathcal{T} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{c\}, X, \emptyset\}$$

- (a) Verificare che \mathcal{T} è una topologia su X . È metrizzabile? [3 punti]
- (b) Trovare la chiusura e la parte interna di $E_1 = \{d\}$, $E_2 = \{a, d\}$, $E_3 = \{a\}$. [3 punti]
- (c) Descrivere tutte le funzioni continue da (X, \mathcal{T}) in uno spazio con due punti dotato della topologia discreta. [3 punti]

3. Si consideri il seguente sottospazio $X \subset \mathbb{R}^3$ con la topologia indotta da quella euclidea.

$$X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y(x^2 + y^2 + z^2 + 2z) = 0\}.$$

- (a) Lo spazio X è connesso per archi? [2 punti]
- (b) Calcolare il suo gruppo fondamentale. [4 punti]
- (c) Stabilire se i sottospazi $Y = X \cap \{z = 0\}$ e $Z = X \cap \{x = 0\}$ sono o meno retratti di X . In caso positivo descrivere una retrazione. [4 punti]