Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 24 febbraio 2017

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero dimostratelo o spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
   (a) Ogni omeomorfismo è un'applicazione sia aperta sia chiusa;
   (b) ogni applicazione sia aperta sia chiusa è un omeomorfismo;
   (c) ogni applicazione chiusa è anche aperta;
   (d) ogni applicazione biiettiva e chiusa possiede inversa continua;
   (e) ogni applicazione biiettiva e chiusa è anche aperta.

2. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Si consideri la funzione $d_f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita così:
$$d_f(x,y) := |f(x) - f(y)|.$$
   (a) Dimostrare che d_f è una metrica su $\mathbb{R}$ se e solo se f è iniettiva.
   (b) Dimostrare che se d_f è una metrica equivalente[1] alla metrica euclidea $\mathcal{T}_e$ su $\mathbb{R}$, allora f è continua.
   (c) Data f iniettiva, è sempre vero che d_f è topologicamente equivalente a $\mathcal{T}_e$?

3. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono compatti e quali sono connessi quando vengono dotati della topologie indotte dalle seguenti: $\mathcal{T}_-$, $\mathcal{T}_e$ e $\mathcal{T}_S$, dove $\mathcal{T}_e$ è la topologia euclidea, $\mathcal{T}_-$ è la topologia della continuità superiore, i cui aperti sono il vuoto, $\mathbb{R}$ e gli intervalli della forma $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$, e $\mathcal{T}_S$ è la topologia di Sorgenfrey.
$$A = (0,1],\ B = [0,1)\ C = (-\infty, 1].$$

4. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$, dotati della topoliga indotta da quella euclidea:
$$S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + y^2 = 1\}$$
$$r_{(a,b)} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\} \text{ per } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$
Si dividano gli spazi $X_{(a,b)} := S^1 \cup r_{(a,b)}$ in classi di omeomorfismo e di equivalenza omotopica (al variare di $(a,b) \in \mathbb{R}^2$).

[1] Si ricordi che due metriche d e d' su $\mathbb{R}$ si dicono equivalenti se esistono due numeri reali strettamente positivi α e β tali che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ valgono le disuguaglianze $\alpha d'(x,y) \geq d(x,y) \geq \beta d'(x,y)$; due metriche sono topologicamente equivalenti se inducono la stessa topologia.