

Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 25 luglio 2017

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero dimostratele o spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

- (a) Ogni funzione costante è continua.
- (b) Ogni funzione continua è costante.
- (c) Ogni funzione biiettiva è continua.
- (d) Ogni omeomorfismo è continuo.
- (e) Ogni omeomorfismo è aperto.
- (f) Ogni funzione continua e aperta è un omeomorfismo.

2. Sia X un insieme con 4 elementi: $X = \{a, b, c, d\}$. Sia \mathcal{T} la seguente collezione di sottonisemi:

$$\mathcal{T} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{c\}, X, \emptyset\}$$

- (a) Verificare che \mathcal{T} è una topologia su X . È metrizzabile?
- (b) Trovare la chiusura e la parte interna di $E_1 = \{d\}$, $E_2 = \{a, d\}$, $E_3 = \{a\}$.
- (c) Stabilire quali sono le funzioni continue da (X, \mathcal{T}) in uno spazio con due punti dotato della topologia discreta.

3. Siano X e Y spazi topologici e sia $p: X \times Y \rightarrow X$ la proiezione naturale. Dire, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- (a) l'applicazione p è aperta;
- (b) l'applicazione p è chiusa;
- (c) lo spazio X è omeomorfo al quoziente $X \times Y / \sim$ dove \sim è la relazione di equivalenza $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $x = x'$.

4. Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^2 (con la topologia euclidea):

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + 2x^2 + xy^2 = 0\}.$$

- (a) Farne un disegno.
- (b) È connesso per archi? È compatto? È di Hausdorff?
- (c) Calcolarne il gruppo fondamentale.
- (d) Stabilire se il sottospazio $Y := \{x = 0\} \subset X$ è un retratto di deformazione di X .