Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 26 giugno 2019

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

   (a) Una topologia in cui ogni aperto è chiuso è necessariamente la topologia discreta. *[2,5 punti]*

   (b) Una topologia in cui i punti sono aperti è necessariamente la topologia discreta. *[2,5 punti]*

   (c) In qualunque topologia metrizzabile i punti sono necessariamente chiusi. *[2,5 punti]*

   (d) In qualunque topologia metrizzabile i punti sono necessariamente chiusi e non aperti. *[2,5 punti]*

2. Sia $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathcal{T}_+ = \{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ la topologia della semicontinuità superiore.

   (a) Dimostrare che, con la topologia $\mathcal{T}$, ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è connesso. *[2,5 punti]*

   Siano $F := (-\infty, 0] \subset \mathbb{R}, E := \mathbb{R} \setminus F$, sempre con la topologia $\mathcal{T}$.

   (b) F è aperto? Qual è la sua parte interna? È chiuso? Stesse domande per E. *[2,5 punti]*

   (c) F è denso? Stessa domanda per E. *[2,5 punti]*

   (d) F è compatto? Stessa domanda per E. *[2,5 punti]*

   Sia ora $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione

   $$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ per } x < 1 \\ x + 1 \text{ per } x \geq 1 \end{cases}$$

   (e) Stabilire se f è continua da: *[2,5 punti]*

   i. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$;

   ii. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$;

   iii. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_+)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

3. Si consideri la seguente famiglie di sottospazi di $\mathbb{R}^2$, con la topologia eulcidea, dipendenti da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

   $$X_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - a^2)(x^2 + y^2 - 4x + 3) = 0\} \subset \mathbb{R}^{\cdot}$$

   (a) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ lo spazio X_a è compatto, e per quali è connesso. *[2 punti]*

   (b) Suddividere gli X_a in classi di omeomorfismo al variare di $a \in \mathbb{R}$. *[3,5 punti]*

   (c) Stabilire se per qualche $a \in \mathbb{R}$ e per qualche $n \in \mathbb{N}$, lo spazio X_a è omotopicamente equivalente al bouquet di n circonferenze. *[3,5 punti]*

1) vero o falso

(a) Falso: se prendo X insieme qualsiasi con $|X|>1$ $(X, \mathcal{C})$ è uno spazio topologico dove ogni aperto è chiuso ma $\mathcal{C}$ non è la topologia discreta.

(b) vero: se X è spazio topologico dove ogni punto è aperto, allora $\tau_X = \mathcal{D}$. Infatti, $\forall S \subseteq X$ $\quad S = \bigcup_{x \in S} \{x\}$ (S è unione dei suoi punti),
quindi $S \in \tau_X$ $\Rightarrow$ $\mathcal{D} \subseteq \tau_X$ dunque $\mathcal{D} = \tau_X$.

(c) vero Sia (X, τ_X) metrizzabile, sia d metrica su X che induce τ_X.
Sia $x \in X$. Per ogni $y \neq x$ $\exists \varepsilon > 0$ tale che $x \notin B_\varepsilon(y)$ (basta prendere $0 < \varepsilon < \frac{d(x,y)}{2}$)
Dunque $X \setminus \{x\}$ è aperto, cioè $\{x\}$ è chiuso.

(d) Falso per ogni insieme $X \neq \emptyset$ la topologia discreta è metrizzabile (indotta dalla metrica discreta) e i punti in X sono sia aperti sia chiusi per $\mathcal{D}$.

2) $\tau_+ = \{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$

(a) Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme qualunque. Voglio vedere che $(S, \tau_{+|S})$ è connesso:

- Se $|S| = 1$ S è il singoletto, che è connesso.
- Se $|S| > 1$ supponiamo per assurdo che $\exists A, B$ aperti non vuoti in S tali che $S = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$
Prendo $x \in A$ e $y \in B$ supponiamo $x < y$ (non è limitativo ovviamente)

B aperto $\Rightarrow$ $\exists\, b \in \mathbb{R}$ tc $(-\infty, b) \cap S = B \ni y$
e $B \neq \emptyset$

ma allora $x \in (-\infty, b) \cap S \Rightarrow x \in B$ Assurdo

(b) $F = (-\infty, 0] \notin \tau_+$, F non è aperto

$\mathbb{R} \setminus F = (0, +\infty) \notin \tau_+ \Rightarrow$ F non è chiuso

$$\mathring{F} = \bigcup \{A \mid A \in \tau_+,\ A \subseteq F\}$$

poichè $(-\infty, 0) = F \setminus \{0\} \in \tau_+$

e F non è aperto, $\Rightarrow$ $\mathring{F} = (-\infty, 0)$

$$\overline{F} = \bigcap \{C \mid C \text{ chiuso},\ C \supseteq F\}$$

L'unico chiuso di τ_+ che contiene F è $\mathbb{R}$

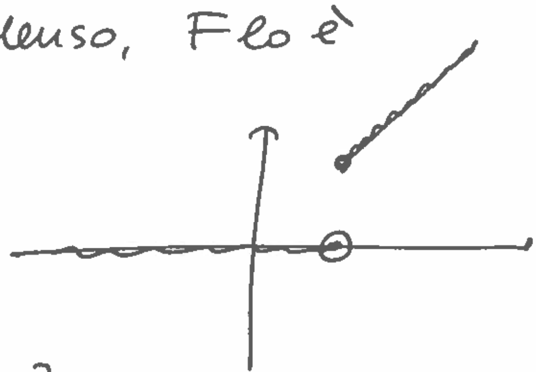
Dunque $\overline{F} = \mathbb{R}$

$E = \mathbb{R} \setminus F$ $\qquad \overline{E} = \mathbb{R} \setminus \mathring{F} = [0, +\infty)$

$\mathring{E} = \mathbb{R} \setminus \overline{F} = \emptyset$

(c) Un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ è denso per τ_+ se $\overline{S} = \mathbb{R}$. Dunque E non è denso, F lo è

(d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ x+1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$



osservo che

$f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ $\quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

i) $f^{-1}((-\infty, a)) = \begin{cases} (-\infty, 1) & \text{se } a \in (0, 2] \\ \emptyset & \text{se } a \leq 0 \\ (-\infty, a-1) & \text{se } a \in (2, +\infty) \end{cases}$

in ogni caso $\forall\, U \in \tau_+$ $f^{-1}(U) \in \tau_+ \subseteq \tau_e$

Dunque $f : (\mathbb{R}, \tau_e) \to (\mathbb{R}, \tau_+)$ e $f : (\mathbb{R}, \tau_+) \to (\mathbb{R}, \tau_+)$ è continua in entrambi i casi

2 e 1/2

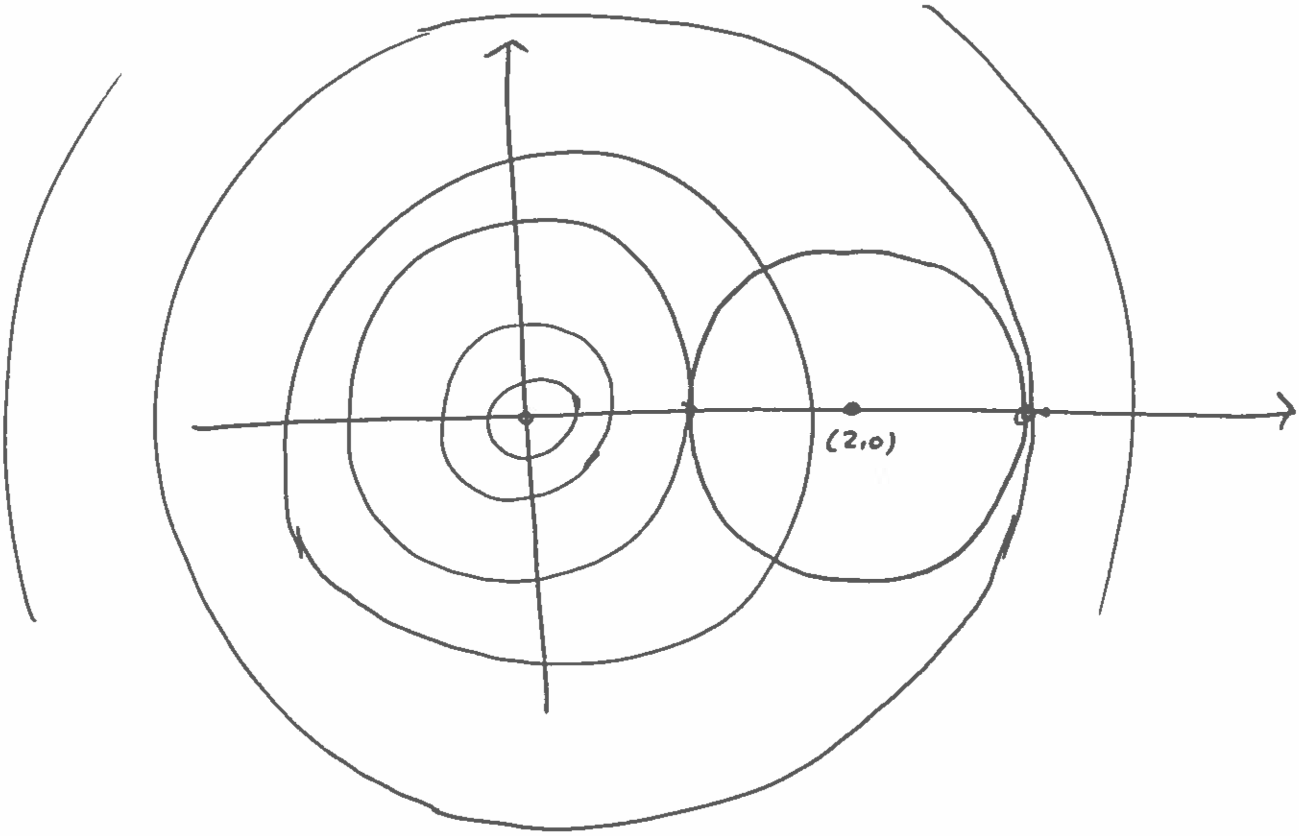
Invece

$$f : (\mathbb{R}, \tau_+) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$$

non è continua: ad esempio

$$f^{-1}\left((-1, 1/2) \right) = \{0\} \notin \tau_+$$

(questo mostra che f non è neanche continua con τ_e in partenza e in arrivo



Se $|a|>0$ X_a è unione di una circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $|a|$ con la circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio 1. Chiamo la prima C_a e la seconda C

se $|a|=0$ $X_0 = \{(0,0)\} \cup C$, unita al punto $(0,0)$ (che è esterno a C)

(a) Considero $f(x,y) = (x^2+y^2-a^2)((x-2)^2+y^2-1)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è un'applicazione continua, dunque

$X_a = f^{-1}(0)$ è un <u>chiuso</u> in $\mathbb{R}^2$.

Inoltre $C_a \subseteq B^{de}_{a+1}(\underline{0})$ $C \subseteq B^{de}_2((2,0))$

Dunque $C_a \cup C = X_a$ è limitato $\forall a \in \mathbb{R}$ rispetto alla metrica euclidea.

Per il teorema di Heine-Borel X_a è dunque compatto $\forall a \in \mathbb{R}$

Inoltre $\forall a$ $C_a \sim C \sim S^1$ che è cpa (connesso per archi). Dunque, se $C_a \cap C \neq \emptyset$ allora X_a è cpa dunque connesso. Per questo usiamo il seguente risultato:

se $Y, Z \subseteq X$ sono sottospazi connessi tali che
$Y \cap Z \neq \phi \Rightarrow Y \cup Z$ è un sottospazio connesso.

Se invece $C \cap C_a = \emptyset$, osserviamo che

$C = g^{-1}(0) \qquad g(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 1 \qquad g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

e Data $h_a: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad h_a(x,y) = x^2 + y^2 - a^2$

$C_a = h_a^{-1}(0)$

Quindi C e C_a sono entrambi chiusi in $\mathbb{R}^2$

Dunque in questo caso X_a è unione disgiunta di due suoi sottospazi chiusi (C e C_a) e quindi sconnesso.

Ora osserviamo che

$$C_a \cap C = \emptyset \text{ se } |a| \in [0,1) \cup (3, +\infty)$$
$$C_a \cap C \neq \emptyset \text{ se } |a| \in [1, 3]$$

b) La connessione è una proprietà topologica.

Se $a=0 \qquad X_0 = \{(0,0)\} \cup C$

se $|a| \in (0,1) \cup (3,+\infty)$ X_a è unione disgiunta di due circonferenze

$\forall a$ tale che $|a| \in (0,1) \cup (3,+\infty) \quad X_a \simeq X_{1/2}$

ad esempio tramite

$\varphi: X_a \to X_{1/2}$ così definito:

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} \dfrac{(x,y)}{2|a|} & \text{se } (x,y) \in C_a \\ (x,y) & \text{se } (x,y) \in C \end{cases}$$

poiché C e C_a sono chiusi disgiunti, φ è ben definito e continuo ed è immediato costruire un'inversa continua.

Le componenti connesse di X_a sono C_a e C
(sono connessi, aperti e chiusi in X_a)

Le componenti connesse di X_0 sono $\{(0,0)\}$ e C (5)

Dunque $X_a \not\approx X_0$ in questi casi.

→ Nel caso $|a| = 1, 3$, osservo che $X_{-1} = X_1$ $X_{-3} = X_3$

e $X_1 \simeq X_3$ ad esempio tramite

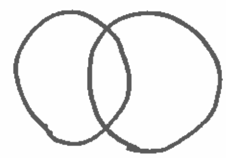
$$\varphi(x,y) := \begin{cases} (3x, 3y) & \text{se } (x,y) \in C_1 \\ (-x+4, y) & \text{se } (x,y) \in C \end{cases}$$

riflessione rispetto alla retta $x=2$

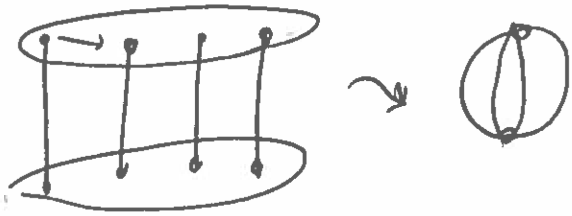
φ è ben definita perché sull'punto di intersezione $\{(1,0)\} = C_1 \cap C$ le due funzioni coincidono. È continua perché C_1 e C sono chiusi in X_1. È facile scrivere l'inversa

$$\varphi^{-1}(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right) & (x,y) \in C_3 \\ (-x+4, y) & \text{se } (x,y) \in C \end{cases}$$

→ Nel caso $|a| \in (1,3)$ ho spazi della forma



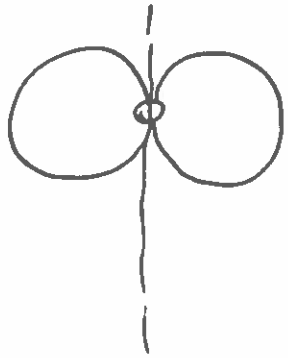
Questi spazi sono tutti omeomorfi tra loro. Infatti sono tutti omeomorfi a 4 segmenti disgiunti in $\mathbb{R}^2$ con gli estremi identificati come in figura:



Ora, basta controllare se questi spazi sono omeomorfi a X_1

Perché di certo X_1 e X_a con $|a| \in (1,3)$ non sono omeomorfi a X_a con $a \in [0,1) \cup (3,+\infty)$ essendo questi ultimi sconnessi.

Osservo che se tolgo $(1,0)$ da X_1 ottengo due componenti connesse, mentre $\forall p \in X_2$ $X_2 \setminus \{p\}$ è cpa dunque connesso:



$$X_1 \setminus \{(1,0)\} = (X_1 \cap \{x<1\}) \cup (X_1 \cap \{x>0\})$$

aperti non vuoti

sono tutti cpa

Dunque riassumendo le classi di omeomorfismo di X_a sono le seguenti 4:

$\{X_0\}$

$\{X_1, X_3, X_{-1}, X_{-3}\}$

$\{X_a\}_{a \in (1,3)}$

$\{X_a\}_{a \in (0,1) \cup (3,+\infty)}$

(c) per $|a| \in [0,1) \cup (3,+\infty)$ X_a è sconnesso quindi certo non omeomorfo al bouquet di n circonferenze $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

X_1 è il bouquet di 2 circonferenze

$X_2 =$ 

di $n \geq 2$ circonf

X_2 non è omeomorfo a un bouquet (per lo stesso ragionamento di prima (tolto il punto di $\cap$ delle circonferenze sconnetto lo spazio, tolto qualunque punto di X_2 rimane connesso) e neanche a S^1 (ad esempio l'intorno di un punto di $\cap$ o $+$ di X_1 non è omeomorfo a nessun intorno di nessun punto di S^1)

Però contraendo uno degli archi di circonferenze omeomorfi a un segmento in X_2

ottengo una equivalenza omotopica tra X_2 e uno spazio omeomorfo al bouquet di $\underline{3}$ circonferenze.