Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 28 giugno 2018

Giustificare sempre le risposte.

1. Sia X uno spazio topologico. Vero o falso? [se vero dimostratelo o spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

   (a) L'unione di una famiglia di sottoinsiemi chiusi di X è un sottoinsieme chiuso di X. *[2,5 punti]*

   (b) L'unione di una famiglia di sottoinsiemi compatti di X è un sottoinsieme compatto di X. *[2,5 punti]*

   (c) L'unionee di una famiglia di sottoinsiemi connessi di X è un sottoinsieme connesso di X. *[2,5 punti]*

   (d) Sia $x \in X$. L'unione di una famiglia di sottoinsiemi connessi di X che contengono tutti x è un sottoinsieme connesso di X. *[2,5 punti]*

2. Siano rispettivamente $\mathcal{D}$ la topologia discreta ed $\mathcal{T}_e$ la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Consideriamo lo spazio prodotto $(\mathbb{R}, \mathcal{D}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$, e chiamiamo $\mathcal{T}$ la topologia prodotto ottenuta su $\mathbb{R}^2$.

   (a) Scrivere la base canonica per $\mathcal{T}$. La topologia $\mathcal{T}$ è confrontabile con quella euclidea su $\mathbb{R}^2$? In caso positivo, è più o meno fine? *[2,5 punti]*

   Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$: $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0,\, 1 < y < 3\}$,
   $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0,\, 1 < x < 3\}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

   (b) Quali di questi sottoinsiemi sono aperti per $\mathcal{T}$? *[2,5 punti]*

   (c) Trovare la chiusura di Z e W rispetto a $\mathcal{T}$. *[2,5 punti]*

   (d) Consideriamo l'applicazione $f\colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$, così definita: $f(x, y) = x$. È continua? È aperta? *[2 punti]*

   (e) Stabilire se Z è connesso; e se lo è W. *[2,5 punti]*

3. Consideriamo $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea.

   (a) Si dimostri che $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 2$. *[3 punti]*

   (b) Si dimostri che $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$. *[3 punti]*

   (c) Si dimostri che $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ sono omotopicamente equivalenti per ogni $n, m \in \mathbb{N}^{>0}$. *[3 punti]*

Soluzioni

1. (a) Falso: consideriamo in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ la famiglia di intervalli chiusi $C_n := [0, 1 - 1/n]$. Vale che $\cup_{n \in \mathbb{N}^+} C_n = [0, 1)$ che non è un chiuso di $\mathcal{T}_e$.

   (b) Falso: ricordiamo che il teorems di Heine-Borel ci dice che in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ un sottoinsieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato. L'esempio del punto precedente dunque costituisce un controesempio anche per questa affermazione.

   (c) Falso: basta prendere in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ $C = (0, 1)$, $B = (2, 3)$. Sono sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ ma la loro unione $C \cup B$ non è connessa (infatti C è aperto chiuso proprio non vuoto in $C \cup B$).

   (d) Vero: sia $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi di X tali che $x \in C_\alpha$ per ogni α. Sia U un sottoinsieme aperto e chiuso e non vuoto di $\cup_\alpha C_\alpha$. Vogliamo dimostrare che $U = \cup_\alpha C_\alpha$. Possiamo supporre che $x \in U$ (altrimenti passiamo al complementare di U che è ancora aperto chiuso e non vuoto). Dunque per definizione di topologia indotta per ogni $\alpha \in A$, $U \cap C_\alpha$ è aperto e chiuso in C_α (e non vuoto perché contiene x). Per la connessione di C_α vale che $U \cap C_\alpha = C_\alpha$ per ogni α, e quindi $U = \cup_\alpha C_\alpha$, come volevamo.

2. (a) La base canonica per $\mathcal{T}$ è:

$$\mathcal{B} = \{Y \times \mathcal{U} \,|\, Y \subseteq \mathbb{R}, \mathcal{U} \in \mathcal{T}_e\}.$$

   Poichè la topologia euclidea $\mathcal{T}_e^2$ su $\mathbb{R}^2$ coincide con la topologia prodotto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$, una base per $\mathcal{T}_e^2$ è

$$\mathcal{B}' = \{\mathcal{V} \times \mathcal{U} \,|\, \mathcal{V} \in \mathcal{T}_e, \mathcal{U} \in \mathcal{T}_e\}.$$

   È quindi chiaro che $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, cioè che ogni elemento della base $\mathcal{B}$ della topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$, appartiene a una base per $\mathcal{T}$. Quindi la topologia $\mathcal{T}$ è più fine di quella euclidea su $\mathbb{R}^2$. È anche strettamente più fine: ad esempio l'insieme $\{0\} \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ è aperto per $\mathcal{T}$ (infatti appartiene a $\mathcal{B}$), mentre non è aperto per $\mathcal{T}_e^2$.

   (b) $Z = \{0\} \times (1, 3) \in \mathcal{B}$, quindi è aperto per $\mathcal{T}$. Il sottospazio $W = (1, 3) \times \{0\}$ non è aperto per $\mathcal{T}$; infatti, ricordiamo che la proiezione sul secondo fattore $p_2 \colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ è aperta; quindi se W fosse aperto, $p_2(W) = \{0\}$ dovrebbe essere aperto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$, cosa falsa. L'insieme D è aperto per la topologia euclidea $\mathcal{T}_e^2$, quindi lo è anche per $\mathcal{T}$, per il punto (a).

   (c) Ricordiamo che in generale se X e Y sono due spazi topologici, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ due sottoinsiemi, vale che $\overline{A \times B}^{X \times Y} = \overline{A}^X \times \overline{B}^Y$. Dunque nei nostri casi abbiamo che $\overline{Z} = \overline{\{0\}} \times \overline{(1, 3)} = \{0\} \times [1, 3]$. Attenzione: la chiusura di $\{0\}$ è in $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$, mentre la chiusura di $(1, 3)$ è in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.
   $\overline{W} = \overline{(1, 3)} \times \overline{\{0\}} = (1, 3) \times \{0\} = W$. Dunque W è chiuso per $\mathcal{T}$. Infatti, $(1, 3)$ è chiuso (e aperto) in $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$, e anche $\{0\}$ è chiuso in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

   (d) L'applicazione f è continua: infatti, dato $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_e$, $f^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}$. Invece, f non è aperta: prendiamo ad esempio l'elemento $\{0\} \times (0, 1) \in \mathcal{B}$. L'immagine

$f(\{0\} \times (0,1)) = \{0\}$, che non è aperto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$. *osservazione importante: f non è la proiezione sul primo fattore; infatti, la proiezione sul primo fattore va da $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$.*

(e) Consideriamo la proiezione sul secondo fattore $p_2\colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ ristretta a Z

$$p_{2|Z}\colon Z \to (1,3) \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$$

è un omeomorfismo. Infatti, è biiettiva ed aperta. Dunque, Z è connesso perché lo è $(1,3) \in (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$. Similmente, la restrizione della proiezione sul primo fattore a W

$$p_{1|W}\colon W \to (1,3) \subset (\mathbb{R}, \mathcal{D})$$

è un omeomorfismo: dunque W non è conesso, perché non lo è $(1,3) \in (\mathbb{R}, \mathcal{D})$ (gli unici sottospazi connessi di uno spazio discreto sono i punti).

3. (a) Per assurdo, supponiamo che esista un omeomorfismo φ tra $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}$, allora la restrizione

$$\varphi_{|\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{\varphi(\underline{0})\}$$

sarebbe un omeomorfismo. Ma per $n \geq 2$ lo spazio $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ è connesso per archi, e dunque connesso. Infatti dati qualunque coppia di punti R, S in $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ se il segmento che congiunge R ed S non passa per $\underline{0}$ posso prendere il cammino $\alpha(t) = tS + (1-t)R$, $t \in [0,1]$. In caso contrario posso considerare un punto Q che non sia sulla retta tra R ed S e formare un arco concatenando i due cammini $\beta(t) = tS + (1-t)Q$, $t \in [0,1]$ e $\gamma(t) = tQ + (1-t)R$, $t \in [0,1]$.

D'altra parte per ogni $p \in \mathbb{R}$, lo spazio $\mathbb{R} \setminus \{p\} = (-\infty, p) \cup (p, +\infty)$ è uno spazio sconnesso. Dunque abbiamo una contraddizione.

(b) Per $n = 1$ l'affermazione deriva dal punto precedente. Facciamo per $n \geq 3$ un ragionamento simile a quello del punto precedente. Sia per assurdo $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ un omeoemorfismo. Allora la restrizione

$$\varphi_{|\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(\underline{0})\}$$

è anch'essa un omeomorfismo. Consideriamo però il fatto che la proiezione stereografica ci dice che per ogni $k \in \mathbb{N}^{>2}$ $\mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$ è omoeomorfo a S^{k-1}. Ma d'altra parte per ogni $p \in \mathbb{R}^k$ chiaramente $\mathbb{R}^k \setminus \{p\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$. Dunque in particolare dovrei avere che per $n \geq 3$ valgono questi ismomorfismi di gruppi:

$$\pi_1(S^{n-1}, y_0) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}, x_0) \cong \pi_1(R^2 \setminus \{\underline{0}\}, z_0) \cong \pi_1(S^1, y_0).$$

Per i teoremi dimostrati a lezioni, il gruppo fondamentale di S^1 (con qualunque punto base) è isomorfo a $\mathbb{Z}$, mentre il gruppo fondamentale di S^{n-1} con $n-1 \geq 2$ è banale. Dunque abbiamo trovato un assurdo.

(c) Per ogni $n \in \mathbb{N}^{>0}$, lo spazio $\mathbb{R}^n$ è contraibilie, cioè omotopicamente equivalente ad un punto. Dunque in particolare tutti questi spazi sono omotopicamente equivalenti tra loro. Verifichiamo la prima affermazione: l'inclusione $\underline{0} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ è una equivalenza omotopica tra $\underline{0}$ e $\mathbb{R}^n$, con inversa omotopica l'applicazione costante $\mathbb{R}^n \to \underline{0}$. Infatti, l'unica affermazione non ovvia è che esiste un'omotopia tra l'identità di $\mathbb{R}^n$ e l'applicazione costante, e questa omotopia si può scrivere in questo modo: $F\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, con $F(\underline{x}, t) := t\underline{x}$.