Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 3 settembre 2018

Giustificare sempre le risposte.

1. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Chiamiamo un aperto proprio $U \in \mathcal{T}$ *primo* se vale questa proprietà:

   Se $W, V \in \mathcal{T}$ sono tali che $W \cap V \subseteq U$, allora $W \subseteq U$ oppure $V \subseteq U$.

   (a) Fare un esempio di uno spazio topologico contenente (almeno) un aperto che non sia primo. *[2 punti]*

   (b) Dimostrare che se $x \in X$ è chiuso, allora l'aperto $X \setminus \{x\}$ è primo. *[3 punti]*

   (c) Se X ha la topologia discreta quali sono i suoi aperti primi? *[3 punti]*

   (d) Mostrare più in generale che se X è T2 gli aperti primi sono tutti e soli i complementari di punti. *[3 punti]*

2. Consideriamo la seguente funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) := \begin{cases} 3x \text{ se } x \leq 0 \\ -2x \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

   (a) Scrivere in generale cosa significa che una funzione tra spazi topologici è continua, aperta, chiusa. *[1,5 punto]*

   (b) Stabilire se $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ è continua, aperta e/o chiusa, dove $\mathcal{T}_e$ è la topologia euclidea. *[2,5 punti]*

   (c) Stabilire se $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ è continua, aperta e/o chiusa, dove $\mathcal{T}_S$ la topologia di Sorgrenfrey. *[3 punti]*

   (d) Sia ora $\mathcal{S}$ la topologia quoziente indotta su $\mathbb{R}$ da f, scegliendo in partenza la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$. Stabilire se $\mathcal{S}$ è confrontabile con $\mathcal{T}_e$ e/o con $\mathcal{T}_S$, e in caso affermativo, se è più o meno fine. *[3 punti]*

3. (a) Definire uno spazio contraibile. *[2 punti]*

   (b) Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea) è contraibile. *[2,5 punti]*

   (c) Sia $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sfera 2-dimensionale, con la topologia euclidea. Dimostrare che $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ è contraibile. *[2,5 punti]*

   (d) Dimostrare che $S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ invece non è contraibile. *[3 punti]*