Geometria I

CdL in Matematica, Università dell'Insubria

Prova scritta del 10 dicembre 2014

Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

   (a) In qualunque spazio topologico i sottospazi compatti sono chiusi.

   Falso. Per esempio consideriamo un insieme di due punti con una topologia non discreta: $X = \{a, b\}$ $\mathcal{T} = \{\{a\}, X, \emptyset\}$. *Il punto* $a \in X$ *non è chiuso ma ovviamente è compatto.*

   Osservazione: sappiamo che l'implicazione compatto $\Rightarrow$ *chiuso è vera se* X *è T2 (e infatti il controesempio è con un* X *non T2).*

   (b) Un chiuso in uno spazio compatto è compatto.

   Vero. Sia X *compatto e* $C \subseteq X$ *un suo chiuso. Sia* $\mathcal{A}$ *un ricoprimento aperto di* C*: ogni* $A \in \mathcal{A}$ *è aperto in* X *e*

   $$C \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

   Allora $\mathcal{A} \cup (X \setminus C)$ *è un ricoprimento aperto di* X*. Ne estraggo un sottoricoprimento finito per la compattezza di* X*. Dunque In particolare esiste un numero finito di elementi di* $\mathcal{A}$*,* $A_1, \ldots A_k$*, tali che*

   $$X = \left(\bigcup_{i=1,\ldots,k} A_i \right) \bigcup (X \setminus C).$$

   Dunque gli $A_1, \ldots A_k$ *sono un sottoricoprimento finito di* C*.*

   (c) Un sottospazio di cardinalità infinita in uno spazio compatto non può essere discreto.

   Falso. Controesempio: $\{1/n, n \in \mathbb{N}^+\} \subset [0, 1]$.

2. Dimostrare che l'unica topologia metrizzabile su un insieme finito è la topologia discreta.

   La topologia discreta è metrizzabile su qualunque insieme X*; infatti è indotta dalla metrica discreta*

   $$d(x, y) := \begin{cases} 0 & se\ x = y \\ 1 & se\ x \neq y \end{cases}$$

   D'altra parte consideriamo una topologia metrizzabile $\mathcal{T}$ *su un insieme* finito X*. Siccome* $\mathcal{T}$ *è metrizzabile, deve essere in particolare T1. In particolare, per ogni* x *in* X *e per ogni* $y \in X \setminus \{x\}$*, esiste un aperto* $\mathcal{U}_y$ *tale che* $x \in \mathcal{U}_y$ *e* $y \notin \mathcal{U}_y$*. Ma allora* $\{x\}$ *è l'intersezione di una famiglia* finita *di aperti, dunque è aperto. Ovviamente è anche chiuso (che è equivalente alla proprietà T1 appunto), dunque la topologia su* X *è quella discreta.*

3. Classificare a meno di omeomorfismi i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea).

   (a) una retta;

   (b) l'unione di due rette parallele;

   (c) l'unione di due rette incidenti;

   (d) $\{(x, y) \mid xy = 1\}$.

Osserviamo prima che le rette in $\mathbb{R}^2$ sono tutte omeomorfe tra loro, e cosi' pure l'unione di due rette parallele e l'unione di due rette incidenti. L'insieme (d) è un'iperbole, che è omeomorfa all'unione di due rette parallele.

Un insieme della forma (b) è sconnesso, mentre (a) e (c) sono connessi. Inoltre se tolgo il punto di intersezione di due rette incidenti, ottengo 4 componenti connesse, mentre qualunque punto io tolga da una retta ottengo due componenti connesse. Dunque anche (a) e (c) non possono essere omeomorfe. Riassumendo, le classi di omeomorfismo sono $\{(a)\}$, $\{(b),(d)\}$ e $\{(c)\}$.

4. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ (con la topologia euclidea) così definiti:

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z \in [-1,1]\},$$

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z \in [-1,1/2\},$$

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z \in [-1/2,1/2]\}.$$

Si osservi che $Z \subset Y \subset X$.

(a) Si calcolino (motivando la risposta) i gruppi fondamentali di X e di Y e di Z.
Abbiamo che $X = S^2$, dunque è semplicemente connesso. Lo spazio Y è S^2 meno un punto, che è omeomorfo al disco chiuso (ad esempio con la proiezione stereografica), che è contraibile, quindi semplicemente connesso. Invece Z è S^2 meno due punti, che è omeomorfo alla corona circolare chiusa. Questo spazio si retrae di deformazione su un S^1, quindi il suo gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

(b) È vero che Z è retratto di deformazione di X? È vero che Y è retratto di deformazione di X?
Lo spazio Z non può essere retratto di deformazione di X perché per quanto visto nel punto precedente i gruppi fondamentali di questi spazi non sono isomorfi.
Invece per quanto riguarda Y e X, i gruppi fondamentali sono entrambi banali, però $X = S^2$ non è contraibile, mentre Y lo è, quindi non sono omotopicamente equivalenti; in particolare Y non è un retratto di deformazione di X.