

# Geometria I

**CdL in Matematica, Università dell'Insubria**  
**Prova straordinaria scritta del 20 gennaio 2017**  
Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero dimostrate o spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
  - (a) Quoziente di un compatto è compatto;
  - (b) Quoziente di uno spazio T2 è uno spazio T2;
  - (c) La contrazione a un punto di un sottospazio compatto di uno spazio T2 è T2;
  - (d) La contrazione a un punto di un sottospazio T2 di uno spazio T2 è T2.
2. Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ :  $\mathcal{T} := \{Y \subset \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$ 
  - (a) Dimostrare che  $\mathcal{T}$  è una topologia su  $\mathbb{R}$ .
  - (b) Si stabilisca se  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  è primo-numerabile.
  - (c) Si stabilisca se  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  è secondo-numerabile.
  - (d) Si stabilisca se  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  è separabile.
3. Dimostrare che uno spazio  $X$  è connesso se e solo se ogni funzione da continua da  $X$  in uno spazio discreto è costante.
4. Calcolare il gruppo fondamentale del seguente sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ :

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 - 2x + y^2 + z^2)z = 0\}.$$