ESERCITAZIONE 4

Def. 1 Sia X uno sp. topologico. X è detto disconnesso se $\exists\, U, V$ aperti non vuoti t.c. $U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V = X$.

X è detto connesso se non è disconnesso.

Equivalentemente, X è disconnesso $\iff \exists\, U \neq \emptyset$, $U \neq X$ t.c. U aperto e chiuso contemporaneamente.

Def 2 Siano $x, y \in X$. Diciamo che $x \sim y$ se $\nexists\, U, V$ aperti non vuoti t.c. $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V = X$.

$\sim$ è una relazione di equivalenza e la classe di equivalenza così introdotta $[x]$ è detta componente connessa.

Def. 3 Sia $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continua. γ è detto cammino / curva.

Def. 4 X è detto connesso per archi se $\forall\, x, y \in X$ $\exists\, \gamma$ cammino t.c. $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Vale che connessione per archi $\Rightarrow$ connessione

Osserviamo che i cammini su uno sp. top. inducono una relazione di equivalenza. Infatti diciamo che:

Def. 5 $x \sim y$ s.se $\exists\, \gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continua t.c. $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Mostriamo che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

Infatti:

(i) $x \sim x$: basta scegliere $\gamma(t) := x$

(ii) Se $x \sim y \Rightarrow y \sim x$: da $x \sim y$ deduciamo che

$\exists\ \gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continua t.c. $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$
$t \longmapsto \gamma(t)$

ma allora, se definiamo $-\gamma := \gamma(1-t)$

$-\gamma : [0,1] \longrightarrow X \qquad -\gamma(0) = y \qquad -\gamma(1) = x$

e $-\gamma$ è continua poiché composizione di funzioni continue. $\left(-\gamma = \gamma \circ f \text{, dove } f : [0,1] \longrightarrow [0,1],\ t \longmapsto 1-t \right)$

(iii) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$:

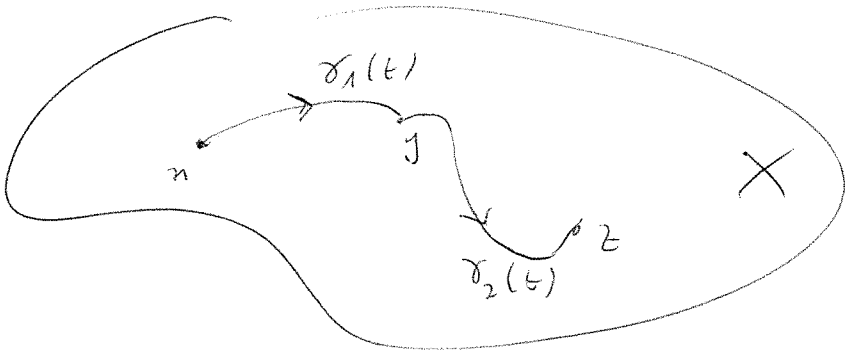
Abbiamo che $\exists\ \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow X$ continua t.c. $\gamma_1(0) = x,\ \gamma_1(1) = y$

$\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ " " $\gamma_2(0) = y,\ \gamma_2(1) = z$

Definiamo $\hat{\gamma} := (\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$

$\hat{\gamma}(0) = x \qquad \hat{\gamma}(1) = z \qquad \hat{\gamma}(1/2) = y$

$\hat{\gamma}$ è continua in $t = 1/2 \Rightarrow \hat{\gamma}$ continua.



$\gamma_1 * \gamma_2$ è detto prodotto (o concatenazione) di cammini.

Dunque $\sim$ induce delle class. di equivalenza.
La componente per archi di $x \in X$ è la classe di equivalenza
$[x] := \{ y \in X : \exists\, \gamma \text{ cammino}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \}$

<u>Def.</u> X è detto loc. connesso (loc. connesso per archi) in $x \in X$ se ~~$\forall x \in X$~~, $\forall U$ intorno di x $\exists\, V$ intorno di x, $V \subseteq U$ t.c. V connesso (~~loc.~~ connesso per archi).
X è detto loc. connesso (loc. connesso per archi) se è loc. connesso $\forall x \in X$. (" " " " $\forall x \in X$).

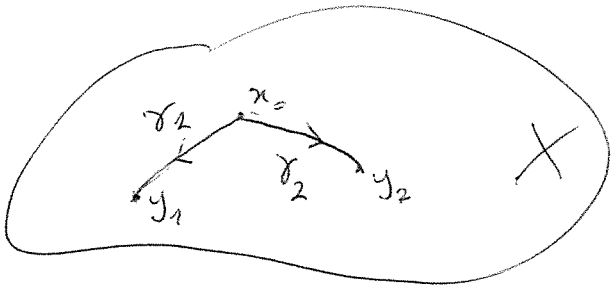
<u>Prop.</u> Sia X connesso e loc. connesso per archi. Allora X è connesso per archi.

<u>dim.</u>

Osserviamo che ci basta dimostrare che $\exists\, x_0 \in X$ t.c. $\forall\, y \in X$ $\exists\, \gamma$ cammino con $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = y$.
Infatti, se ciò fosse vero, allora $\forall\, y_1 \neq y_2 \neq x_0$ ($y_1 \neq x_0$, $y_2 \neq x_0$) $\exists\, \hat{\gamma}$ ~~che~~ cammino ~~che~~ t.c. $\hat{\gamma}(0) = y_1$ $\hat{\gamma}(1) = y_2$

Infatti: $\exists\ \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow X$ continua t.c. $\gamma_1(0) = x_0$ $\gamma_1(1) = y_1$

$\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ " " $\gamma_2(0) = x_0$ $\gamma_2(1) = y_2$



$$\hat{\gamma}(t) := (-\gamma_1 * \gamma_2)(t)$$

Sia $x_0 \in X$ e sia $A := \left\{ y \in Y : \exists\ \gamma \text{ cammino t.c. } \begin{array}{l}\gamma(0) = x_0, \\ \gamma(1) = y\end{array} \right\}$

$A \neq \emptyset$ poiché $x_0 \in A$. Voglio mostrare che A è sia aperto che chiuso in X. Se ciò fosse vero, si deduzrebbe che $A = X$ poiché X è connesso.

1) Mostriamo che A è aperto.

Sia $a \in A$, allora poiché X è loc. connesso per archi, $\exists$ U_a connesso p.a. $\forall\ y \in U_a$, abbiamo che $\exists\ \bar{\gamma}$ cammino t.c. $\bar{\gamma}(0) = a$ e $\bar{\gamma}(1) = y$. Poiché $a \sim x_0$ e $y \sim a \Rightarrow y \sim x_0$ $\forall y \in U_a \Rightarrow U_a \subseteq A \Rightarrow A$ è aperto.

2) Mostriamo che A è chiuso.

2 strategie — $X \setminus A$ e mostrare che è aperto

— sia $y = \lim a_n$, $\{a_n\} \subseteq A$. Mostrare che $y \in A$.

//

Osservazione

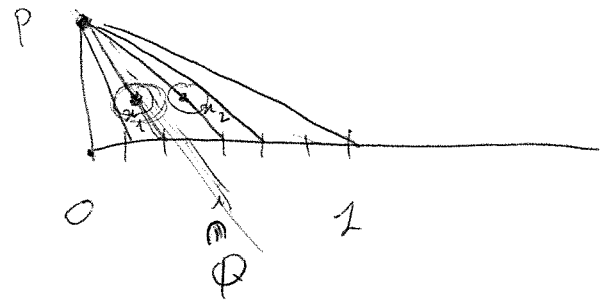
X connesso p.a. $\not\Rightarrow$ X loc. connesso p.a.

Esempio

Consideriamo $I = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

$P = \{(0,1)\} \in \mathbb{R}^2$

$$X = \{(1-t)P + ti : i \in I,\ t \in [0,1]\}$$



Allora banalmente X è connesso p.a. (dim. per ex.)

Però non è loc. c.p.a. infatti sia $\bar{x}_1 \in I$.

$\bar{x}_1 \in r_1$ $\quad \bar{x}_1 = (x_1, 0)$

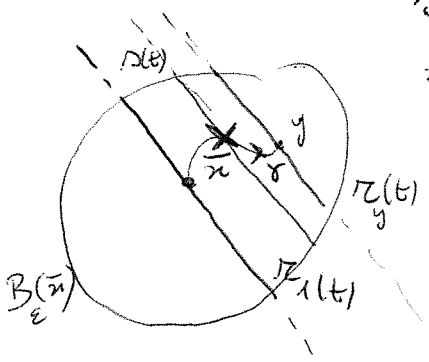
$(r_1 := (1-t)P + t(x_1, 0)$;

$P = (0,1)$ $\quad \Rightarrow r_1(t) = (t x_1 ; 1-t) =$

$= 1 - \frac{1}{x_1} \cdot x$ (espressione analitica)

---

sia $\bar{t} \in (0,1)$ fissato. Il p.to $\bar{x} = r_1(\bar{t}) = (\bar{t} x_1 ; 1-\bar{t})$ non ha intorni connessi p.a.



Infatti, sia fissato $B_\varepsilon(\bar{x})$. $\forall y \in B_\varepsilon(\bar{x}) \cap X$, $\nexists\ \gamma$ cammino continuo t.c. $\gamma(0) = \bar{x}$, $\gamma(1) = y$.

$\bar{x} \in r_1(t)$, $y \in r_y(t)$ $\quad r_1 \cap r_y = \emptyset$

ed $\exists\ \lambda \in I \setminus \mathbb{Q}$, t.c. $s(t) = (t\lambda ; 1-t)$ è "in mezzo" a $r_1(t)$ e $r_y(t)$.

SENO DEL TOPOLOGO

Sappiamo che connesso p.a. $\Rightarrow$ connesso

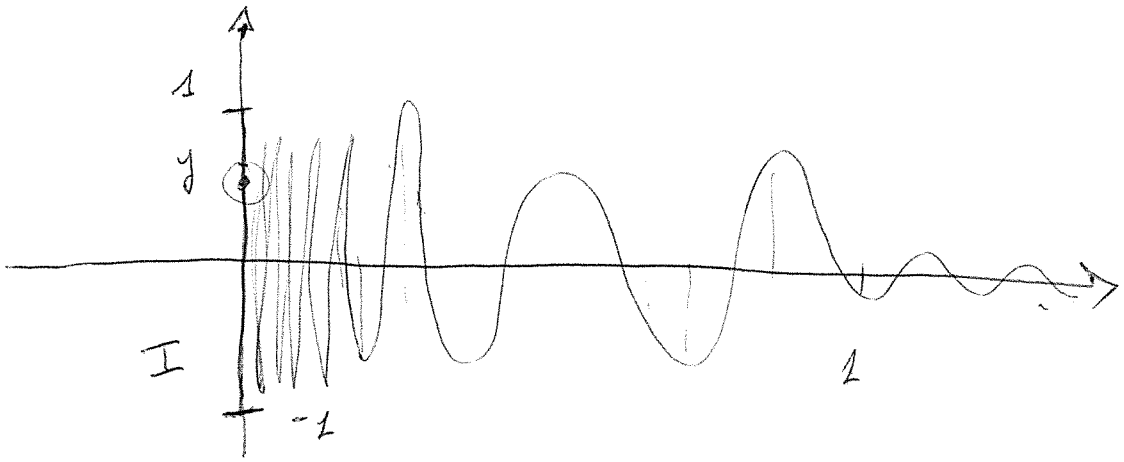
~~Però~~ Vale ~~il~~ anche connesso $\Rightarrow$ connesso p.a. ?

No. Vediamolo con un contro esempio.

Sia $G := \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\}$;

$I := \{0\} \times [-1, 1]$;

$X := I \cup G$



1) Mostriamo che X è connesso.

Ovviamente G è connesso, poiché $G \simeq (0, +\infty)$

(o anche perché grafico di funzione continua)

$\overline{G} = X \Rightarrow X$ è connesso.

O ancora. Sia $y \in \{0\} \times [-1, 1]$.

$\forall B_r(y)$ $\exists \bar{x} \in G$ t.c. $\bar{x} \in B_r(y)$ ~~$\forall$~~ cor $r < \frac{1}{2}$.

(questo perché $\forall$ $0 < x_0 < 1$, ~~...~~ $f((0, x_0)) = [-1, 1]$,

dove $f(x) = \sin(1/x)$).

Dunque se scelgo una successione $x_n = \frac{1}{n}$, ottengo una successione $\{\bar{x}_n\} \subseteq G$ t.c. $\bar{x}_n \to y \Rightarrow y \in \overline{G}$

Poiché G è connesso, allora G è comp. connessa di X $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $G = [G] \Rightarrow \overline{G} = [G]$. Dunque y appartiene alla medesima comp. connessa $[G]$. $\Rightarrow$ $\exists!$ componente connessa.

2) Dimostriamo che X non è connesso p.a.

G e I sono connessi p.a. (dim. per ex.)

Mostriamo che fissati $y \in I$, $\bar{x} \in G$. $\nexists\ \gamma : [0,1] \to X$ continua t.c. $\gamma(0) = y$ e $\gamma(1) = \bar{x}$.

Per assurdo, sia γ cammino t.c. $\gamma(0) = y$, $\gamma(1) = \bar{x}$.

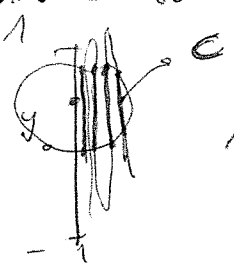
$\exists\ t_0 \in (0, 1)$ t.c. $\gamma([0, t_0]) \subseteq I$, $\gamma(t_0) = y_0 \in I$

e $\gamma((t_0, 1)) \in G$ (dim. per ex.)

Poiché γ è continua, allora è continua in particolare in $t = t_0$, cioè $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$ t.c. $\gamma((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \subseteq B_\varepsilon(y_0)$.

$\gamma((t_0, t_0+\delta)) \subseteq G$ e poiché γ è continua, ~~allora~~ e $(t_0, t_0+\delta)$ è connesso $\Rightarrow$ $\gamma((t_0, t_0+\delta))$ è connesso in $G \cap B_\varepsilon(y_0)$

Osserviamo che $G \cap B_\varepsilon(y_0)$ (con ε suff. piccolo, $\varepsilon < 1/2$) è costituito da infinite comp. connesse disgiunte del tipo.



Allora $\gamma((t_0, t_0+\delta))$

Allora $\gamma((t_0, t_0+\delta))$ è della forma C, in particolare

$\exists\, \lambda > 0$ t.c. $\operatorname{dist}(y_0; \gamma(t_0, t_0+\delta)) \geq \lambda > 0$.

Sia dunque $0 < \hat{\varepsilon} < \lambda$. $\Rightarrow$ $B_{\hat{\varepsilon}}(y_0) \cap \gamma((t_0, t_0+\delta)) = \phi$.

Ma allo stesso tempo, per continuità, $\exists\, 0 < \underset{\hat{\delta}(\hat{\varepsilon})}{\underset{\shortparallel}{\hat{\delta}}} < \delta$ t.c.

$$\gamma((t_0, t_0+\hat{\delta})) \subseteq B_{\hat{\varepsilon}}(y_0).$$

Abbiamo dunque

$$\phi = B_{\hat{\varepsilon}}(y_0) \cap \gamma(t_0, t_0+\delta) \supseteq B_{\hat{\varepsilon}}(y_0) \cap \gamma(t_0, t_0+\hat{\delta}) \neq \phi$$

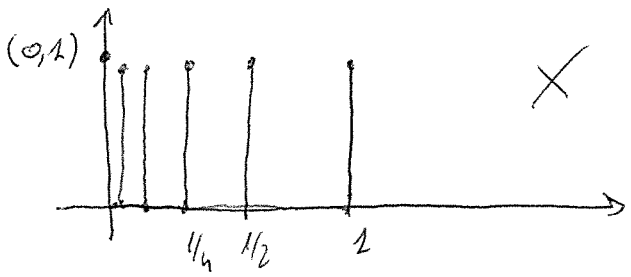
assurdo.

//

<u>Esercizio</u>.

Sia $I = [0,1]$; $A = \bigcup_{\cancel{n \in \mathbb{N}}\, n \geq 1} \left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0,1]$.

Definiamo $X := I \cup A \cup \{(0,1)\}$ (Il Pettine e la Pulce)



Dimostrare che X è connesso ma non è connesso p.a.