Geometria I
Università dell'Insubria
Esercizi 1
a.a. 2017/2018

1. Definiamo seguenti funzioni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

- $d(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
- $d'(\underline{x}, \underline{y}) := \max_i \{|x_i - y_i|\}$.

- (a) Dimostrare che sono delle metriche su $\mathbb{R}^n$;
- (b) Disegnare le bolle aperte in $\mathbb{R}^2$;
- (c) Le metriche d e d' sono topologicamente equivalenti alla metrica euclidea d_e su $\mathbb{R}^n$?

2. Data una metrica d su un'insieme non vuoto X , si consideri:

$$\bar{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

- (a) Dimostrare che $\bar{d}$ è una metrica su X ;
- (b) dimostrare che d e $\bar{d}$ sono metriche equivalenti (cioè inducono la stessa topologia);
- (c) si consideri il caso di $X = \mathbb{R}^n$ e $d = d_e$. In questo caso d e $\bar{d}$ sono metriche topologicamente equivalenti?

3. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

- (a) I punti di uno spazio topologico sono sempre sottoinsiemi chiusi.
- (b) Esistono spazi topologici in cui i punti non sono nè chiusi nè aperti.
- (c) Esistono spazi topologici metrizzabili in cui i punti non sono nè chiusi nè aperti.
- (d) Esistono spazi topologici in cui i punti sono sia chiusi sia aperti.

4. Stabilire quali delle seguenti famiglie sono topologie su $\mathbb{R}$ e quali no:

- (a) $\mathcal{F} := \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$;
- (b) $\mathcal{G} := \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$;
- (c) $\mathcal{G} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$;
- (d) $\mathcal{H} := \{(-c, b), c, b \in \mathbb{R}^{>0} \cup \{+\infty\}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$.

5. Dimostrare che su un insieme X la topologia cofinita coincide con la topologia discreta se e solo se X ha cardinalità finita.
6. Dimostrare che l'unica topologia metrizzabile su uno spazio finito è la topologia discreta.
7. Descrivere tutte le possibili topologie su un insieme con 3 elementi, e confrontarle tra loro.
8. Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} := \{Y \subseteq \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

- (a) Si dimostri che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$;
- (b) stabilire se $\mathcal{T}$ è confrontabile con la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$, e/o con la topologia cofinita su $\mathbb{R}$;
- (c) in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ i punti sono chiusi? È una topologia T2?
- (d) Qual'è la chiusura di $(0, 1]$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$? Qual'è la sua parte interna?
- (e) Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{R}$. Trovare la chiusura e la parte interna di S in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

9. Sia $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ la bolla di centro x e raggio r con la metrica euclidea. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono una base per la topologia euclidea.

- (a) $\{B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$;
- (b) $\{B_r(x), x \in \mathbb{Q}^n, r > 0\}$;
- (c) $\{B_r(x), x \in \mathbb{R}^n, r \geq 1\}$.

10. Sia (X, d) uno spazio metrico. Definiamo la funzione $d': X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1}, \text{ per ogni } x, y \in X.$$

- (a) Dimostrare che d' è una metrica su X tale che $d'(x, y) < 1 \forall x, y \in X$ (d' si chiama normalizzazione della metrica d).
- (b) Dimostrare che d e d' sono topologicamente equivalenti.
- (c) Dimostrare che non esistono due numeri reali a e b tali che per ogni $x, y \in X$ vale che

$$ad(x, y) \leq d'(x, y) \leq bd(x, y).$$

11. Sia X l'insieme

$$X = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua rispetto alla metrica euclidea}\},$$

Definiamo su $X \times X$ la funzione

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \quad \forall f, g \in X$$

- (a) Dimostrare che d è ben definita e che è una metrica su X .
- (b) Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di X sono aperti e/o chiusi (possono non essere nè l'uno nè l'altro!) rispetto alla metrica d :

$$A := \{f \in X \mid f(0) > 1\};$$

$$B := \{f \in X \mid f(0) = 1\};$$

12. Sia $X = \{2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Per ogni $n \in X$ definiamo gli insiemi

$$U_n := \{m \in X \mid m \text{ divide } n\}.$$

- (a) Dimostrare che gli U_n , al variare di n in X formano una base per una topologia $\mathcal{T}$ su X .
- (b) Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è T2? I suoi punti sono chiusi?
- (c) Per ogni $n \in X$, descrivere la chiusura di $\{n\}$ in $(X, \mathcal{T})$.

13. Si consideri la metrica euclidea d_e su $\mathbb{R}^n$. Per ogni punto $p \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$ sia

$$C_r(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_e(x, p) \leq r\}.$$

- (a) Dimostrare che $C_r(p)$ è la chiusura della palla di raggio r centrata in p .
- (b) Si dica se esiste una topologia su $\mathbb{R}^n$ per la quale la famiglia $\mathcal{C} := \{C_r(p), r > 0, p \in \mathbb{R}^n\}$ è una base.
- (c) Qual'è la topologia generata da $\mathcal{C}$ su $\mathbb{R}^n$?

14. Dimostrare che la topologia indotta da una metrica su un insieme X è la meno fine delle topologie su X per cui le bolle sono aperte.

15. Esercizio 3.5 pag. 41 del Manetti: dimostrazione topologica che esistono infiniti numeri primi.

16. Dimostrare che la famiglia di intervalli $\{[a, b), a > b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ non è una base per la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$.

17. Dimostrare che uno spazio metrizzabile è T2.

18. Quali delle topologie elencate nell'esercizio 7 sono di Hausdorff (T2)? Quali sono in generale le possibili topologie di Hausdorff su un insieme finito?

19. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che per ogni sottoinsieme $S \subseteq X$ vale che

$$(X \setminus S)^\circ = X \setminus \bar{S}.$$

(la parte interna del complementare è il complementare della chiusura).

20. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che per ogni coppia di sottoinsiemi $A, B \subseteq X$ vale che:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(b) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

(c) Fare un esempio in cui l'inclusione del punto sopra può essere stretta.

21. Sia $\mathcal{E}$ la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Sia $\mathcal{T}_S$ la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$, i.e., la topologia una cui base di aperti è la famiglia degli intervalli del tipo $[a, b)$, con $a < b$. Si consideri l'insieme

$$X := \left\{ -\frac{1}{n} : n > 0 \right\} \subset \mathbb{R}.$$

(a) X è chiuso in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$? E in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$?

(b) In entrambi i casi, qual'è la chiusura di X ?

22. Consideriamo $\mathbb{R}$ con Siano $E = (0, 1), F = [0, 1) \subset \mathbb{R}$. Trovare la chiusura, l'interno e la frontiera di E ed F e dell'insieme $\mathbb{N}$ con le seguenti topologie:

(a) La topologia discreta $\mathcal{D}$;

(b) la topologia concreta $\mathcal{C}$;

(c) la topologia cofinita $\mathcal{K}$ (gli aperti propri sono i complementari degli insiemi finiti di punti);

(d) la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$;

(e) la topologia della semicontinuità superiore $\mathcal{T}_{sup}$;

(f) la topologia di Sorgenfrey $\mathcal{T}_S$;

(g) la topologia $\mathcal{H}$ dell'esercizio 4d.

23. Stabilire quali siano i sottoinsiemi densi di uno spazio con la topologia cofinita.