

Geometria I
Università dell'Insubria
Lidia Stoppino
Esercizi 2
a.a. 2017/2018

1. Sia $f: (X, \mathcal{S}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ una funzione tra spazi topologici.
 - (a) Dimostrare che se f è costante allora f è continua;
 - (b) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia concreta allora f è continua;
 - (c) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia discreta e $\mathcal{S}$ è la topologia indiscreta allora f è continua se e solo se è costante.
2. Sia X un insieme non vuoto, siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ due topologie su X . Sia $f: X \rightarrow X$ l'applicazione identica ($f(x) = x$ per ogni $x \in X$). Dimostrare che:
 - (a) $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{S})$ è continua se e solo se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$;
 - (b) $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{S})$ è aperta se e solo se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$;
 - (c) $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{S})$ è chiusa se e solo se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$;
 - (d) $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{S})$ è un omeomorfismo se e solo se $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.
3. (Topologia indotta da una funzione sul codominio) Sia X uno spazio topologico con topologia $\mathcal{T}$, Y un insieme, e $f: X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di Y
$$f_*\mathcal{T} := \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}.$$
 - (a) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è una topologia su Y .
 - (b) Dimostrare che f è continua rispetto a $\mathcal{T}$ su X e $f_*\mathcal{T}$ su Y .
 - (c) Dimostrare che $f_*\mathcal{T}$ è la più fine delle topologie su Y che rendono f continua.
4. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]
 - (a) Un'applicazione continua aperta e iniettiva $f: X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
 - (b) Un'applicazione continua aperta e suriettiva $f: X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
 - (c) Un'applicazione continua aperta e biiettiva $f: X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici è chiusa.
5. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e $\mathcal{B}$ una base per la topologia di X . Provare che f è aperta se e solo se $f(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$. Dimostrare (quindi esibire un controesempio) che l'analoga affermazione non vale per i chiusi: non è vero che se $f(X \setminus A)$ è chiuso per ogni $A \in \mathcal{B}$, allora f è chiusa.

6. Dimostrare che se $f: X \rightarrow Y$ è un'applicazione biettiva tra spazi topologici, f è aperta se e solo se è chiusa.
7. Fare un esempio di un'applicazione tra spazi topologici che sia:
 - (a) aperta e chiusa ma non continua;
 - (b) continua e aperta e non chiusa;
 - (c) continua e chiusa e non aperta.
8. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione aperta tra spazi topologici, e sia $S \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(S)$ è denso in X (sugg: qui serve la "formula di proiezione" (Manetti Prop. 2.2): se in generale $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ sono sottoinsiemi, vale che $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$).
9. Un'applicazione $f: X \rightarrow Y$ si dice un *omeomorfismo locale* se per ogni $x \in X$ esistono due aperti $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f|_A: A \rightarrow B$ è un omeomorfismo.
 - (a) Dimostrare che un omeomorfismo è un omeomorfismo locale.
 - (b) Il viceversa non è vero: Dimostrare che l'applicazione $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definita da

$$e(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$
 è un omeomorfismo locale ma non un omeomorfismo.
 - (c) Dimostrare che un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.
 - (d) Dimostrare che le fibre di un omeomorfismo locale $f: X \rightarrow Y$ sono sottospazi discreti di X .
10. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
 - (a) Siano $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se f e g sono continue $g \circ f$ la loro composizione $g \circ f$ non è continua.
 - (b) L'inversa di una applicazione biettiva non continua non è continua.
 - (c) Siano $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ due applicazioni tra spazi topologici. Se f non è continua e g è un omeomorfismo, allora $g \circ f$ non è continua.
11. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ la retta reale con la topologia cofinita (in cui gli aperti propri sono i complementari degli insiemi finiti).
 - (a) $f(x) = \sin(x)$ è una funzione continua da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$?
 - (b) Le funzioni polinomiali sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$?
 - (c) Esistono funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ che non sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$, dove $\mathcal{E}$ è la topologia euclidea su $\mathbb{R}$?
 - (d) Esistono funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ che non sono continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$?

12. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ la retta di Sorgenfrey. Siano $f, g: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ le funzioni definite ponendo

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ x & \text{se } x < 1. \end{cases} \quad g(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{se } x > 1 \\ x & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$$

Si discuta la continuità di f e di g .

13. Mostrare che le funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_-)$ sono le funzioni f tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\forall y \in (x - \delta, x + \delta) \ f(y) > f(x) - \epsilon$.
14. Manetti 3.47: esempio di omeomorfismo locale che non è un'applicazione chiusa.
15. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
- (a) La chiusura di un sottospazio discreto è ancora un sottospazio discreto.
 - (b) Ogni sottospazio discreto di uno spazio topologico è chiuso.
 - (c) Ogni sottospazio discreto di uno spazio metrizzabile è chiuso.
 - (d) Un sottospazio finito di uno spazio topologico è sempre discreto.
 - (e) Un sottospazio finito di uno spazio metrizzabile è sempre discreto.
16. L'inclusione di un sottospazio S in uno spazio topologico X è aperta (risp. chiusa) se e solo se S è aperto (risp. chiuso).
17. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ il sottospazio (a, b) è omeomorfo ad $\mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ i sottospazi $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ sono omeomorfi ad $\mathbb{R}$. Dunque questi sottospazi sono tutti nella stessa classe di omeomorfismo.
- Dimostrare che anche i sottospazi $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ sono omeomorfi tra loro, e sono omeomorfe a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.
18. Dimostrare che due rette in $\mathbb{R}^2$ (con la topologia indotta da quella euclidea) sono sempre omeomorfe tra loro, e sono omeomorfe a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.