ESERCIZI 4

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2018/19

1. Dimostrare che la connessione e la connessione per archi sono proprietà topologiche. La proprietà di essere connesso (risp. cpa) passa ai sottospazi?

2. Siano $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ due topologie sullo stesso insieme X, con $\mathcal{T}_1$ meno fine di $\mathcal{T}_2$, cioè $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Quali due delle seguenti quattro implicazioni sono valide?
$$(X, \mathcal{T}_1) \text{ sconnesso } \Rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \text{ sconnesso},$$
$$(X, \mathcal{T}_2) \text{ sconnesso } \Rightarrow (X, \mathcal{T}_1) \text{ sconnesso},$$
$$(X, \mathcal{T}_1) \text{ connesso } \Rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \text{ connesso},$$
$$(X, \mathcal{T}_2) \text{ connesso } \Rightarrow (X, \mathcal{T}_1) \text{ connesso}.$$

3. Sia $X = \mathbb{R}$ con $\mathcal{T}_1 = \mathcal{K}$ la topologia cofinita. Stabilire se $(X, \mathcal{K})$ è connesso. È connesso per archi?

4. (Kosniowski Teorema 9.6) Sia $\{Z_\alpha, \alpha \in I\}$ una famiglia di sottospazi connessi di uno spazio topologico X. Se vale che $\cap_\alpha Z_\alpha \neq \emptyset$, allora $W := \cup_\alpha Z_\alpha$ è connesso.

5. (Kosniowski 9.8 (f), Manetti 4.12) Sia $\{Z_\alpha, \alpha \in I\}$ una famiglia di sottospazi connessi di uno spazio topologico X. Se vale che esiste $\overline{\alpha}$ tale che $Z_{\overline{\alpha}} \cap Z_\alpha \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \in I$, allora $W := \cup_\alpha Z_\alpha$ è connesso.

6. (Manetti 4.14) Sia $\{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ una famiglia numerabile di sottospazi connessi di uno spazio topologico X tali che $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che $A := \cup_n A_n$ è connesso.

7. (Kosniowski 9.8 (e)) Dimostrare che uno spazio X è connesso se e solo se ogni funzione da continua da X in $\mathbb{Z}$ è costante. Dimostrare che uno spazio X è connesso se e solo se ogni funzione da continua da X in uno spazio discreto è costante.

8. Dimostrare che il prodotto di due spazi connessi per archi è connesso per archi.

9. Dimostrare che uno spazio topologico X è localmente connesso se e solo se per ogni aperto $\mathcal{U}$ di X le componenti connesse di $\mathcal{U}$ sono aperte in X.

10. Dimostrare che se ogni punto di uno spazio topologico X possiede un intorno connesso, allora le componenti connesse in X sono aperte e viceversa.

11. Il quoziente di uno spazio topologico localmente connesso è ancora localmente connesso?

12. Dimostrare che il numero di componenti connesse di uno spazio topologico è un invariante topologico.

13. Sia $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \;\; e \;\; y/x \in \mathbb{N}\}$.

    (a) Determinare $\overline{S}$ (la chiusura di S) e dire quali sono i punti di accumulazione di S.

    (b) S è connesso?

    (c) S è connesso?

    (d) S è localmente connesso?

    (e) S è localmente connesso?

14. (Manetti 4.13) Dimostrare che i due sottospazi di $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \leq 0\},$$

$$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\},$$

    non sono omeomorfi.

15. Costruire un esempio di spazio topologico connesso per archi che non è localmente connesso per archi (suggerimento: costruire una variante de “la pulce e il pettine” o del “seno del topologo”).

16. Classificare a meno di omeomorfismi i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea).

    (a) una retta;

    (b) l’unione di due rette;

    (c) $\{(x,y) \mid x^2 + y = 1\}$;

    (d) $\{(x,y) \mid xy = 1\}$.

17. (Manetti 5.9) Mostrare che, al variare di A tra i sottoinsiemi di $[0,1]$ formati da due punti distinti, lo spazio quoziente $[0,1]/A$ può assumere tre diverse classi di omeomorfismo. Stabilire quando lo spazio quoziente $[0,1]/A$ è T2.

18. Quali sono le componenti connesse si $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia euclidea? Esiste una topologia diversa su $\mathbb{Q}$ con le stesse componenti?

19. Uno spazio topologico si dice *totalmente sconnesso* se presi comunque due punti $x, y \in X$, esistono due aperti disgiunti $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ tali che $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$ e $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Ovviamente uno spazio totalmente sconnesso non è connesso.

(a) Fare un esempio di uno spazio sconnesso non totalmente sconnesso.
(b) L'insieme dei razionali $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topologia euclidea è totalmente sconnesso?
(c) Si dimostri che la retta di Sorgenfry $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ è totalmente sconnessa.
(d) Si dimostri che le componenti connesse di uno spazio topologico X totalmente sconnesso sono i sottoinsiemi costituiti da un solo punto.

20. Vero o falso? [se vero dimostratelo o spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

    (a) Il quoziente di un connesso è connesso;
    (b) Il quoziente di uno spazio T2 è uno spazio T2;
    (c) La contrazione a un punto di un sottospazio compatto di uno spazio T2 è T2;
    (d) La contrazione a un punto di un sottospazio T2 di uno spazio T2 è T2.

21. Siano $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ due topologie sullo stesso insieme X, con $\mathcal{T}_1$ meno fine di $\mathcal{T}_2$, cioè $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Quali due delle seguenti due implicazioni sono valide?

$$(X, \mathcal{T}_1) \text{ compatto } \Rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \text{ compatto},$$

$$(X, \mathcal{T}_2) \text{ compatto } \Rightarrow (X, \mathcal{T}_1) \text{ compatto}.$$

22. (4.24 Manetti) Dimostrare che $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{2}\}$ è chiuso e limitato ma non è compatto.

23. Mostrare che l'unione di un numero finito di sottospazi compatti di uno spazio topologico è compatta.

24. Mostrare che un sottospazio compatto di uno spazio metrico è chiuso e limitato. Mostrare che il viceversa non vale in generale (ma per la metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$ sì!).

25. Siano K, L due sottospazi compatti di uno spazio di Hausdorff X. Mostrare che esistono due aperti U, V in X tali che $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.

26. Sia $\mathcal{E}$ la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Sia $\mathcal{T}_S$ la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$, i.e., la topologia una cui base di aperti è la famiglia degli intervalli del tipo $[a, b)$, con $a < b$. Si consideri l'insieme

$$X := \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

    (a) X è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$? $X \cup \{0\}$ è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$?
    (b) X è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$? $X \cup \{0\}$ è compatto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$?

Stesse domande con $Y := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\right\} \subset \mathbb{R}$.

27. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione tra due spazi topologici, con Y compatto e di Hausdorff. Dimostrare che f è continua se e solo se il grafico Γ_f è chiuso nel prodotto $X \times Y$.

28. Si consideri la seguente famiglia su $\mathbb{R}$: $\mathcal{T} := \{Y \subset \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

    (a) Si verifichi che è una topologia su $\mathbb{R}$.

    (b) Si stabilisca se è confrontabile con la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$.

    (c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è compatto?

    (d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è connesso?

29. Consideriamo su $\mathbb{R}$ la topologia della continuità superiore $\mathcal{T}_+$, i cui aperti sono il vuoto, $\mathbb{R}$ e gli intervalli della forma $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono compatti rispetto a $\mathcal{T}_+$:

$$A = (0,1),\ B = [0,1),\ C = (0,+\infty),\ D = [0,+\infty),\ E = (-\infty,1),\ F = (-\infty,1].$$

30. Vero o falso? [se vero spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

    (a) $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ (con la topologia concreta) è compatto;

    (b) $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ (con la topologia discreta) è compatto;

    (c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ (con la topologia euclidea) è compatto;

    (d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ (retta di Sorgenfrey) è compatto.

    Discutere le stesse affermazioni con il sottospazio $[0,1]$ ed il sottospazio $[0,1)$.

31. Siano X e Y due spazi topologici di Hausdorff tali che valga che ogni punto possiede un intorno compatto. Se $\varphi\colon X \to Y$ è un omeomorfismo tra X e Y dimostrare che f estende ad un omeomorfismo delle compattificazioni di Alexandroff $\widehat{f}\colon \widehat{X} \to \widehat{Y}$.

32. (Munkres Ch 3, sez 8, es. 8). Dimostrare che la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{Z}_{>0}$ è omeomorfo al sottospazio di $\mathbb{R}$:

$$\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$