

ESERCIZI 5

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2018/19

1. (Manetti 6.1) Sia \mathbb{R}/\sim lo spazio quoziente di $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ rispetto alla relazione di equivalenza $x \sim y \iff x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che \mathbb{R}/\sim non soddisfa il primo assioma di numerabilità.
2. (Manetti 6.4) Provare che il prodotto di due spazi separabili è separabile. Trovare un esempio di spazio separabile e di un suo sottospazio non separabile (sugg: considerare $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ dove $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ è la retta di Sorgenfrey).
3. (Manetti 6.3) Sia $f: X \rightarrow Y$ continua e suriettiva. Provare che se X è separabile allora anche Y è separabile. Se in aggiunta f è aperta e X ha una base numerabile, allora anche Y ha una base numerabile.
4. (Manetti 6.5) Siano X, Y due spazi topologici e sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, chiusa e suriettiva tale che $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$. Si dimostri che se X è a base numerabile, allora anche Y è a base numerabile.
5. Si consideri la seguente topologia su \mathbb{R} : $\mathcal{T} := \{Y \subset \mathbb{R} \mid Y \cap \mathbb{N} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$ (ref. Foglio 4).
 - (a) Si stabilisca se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è primo-numerabile.
 - (b) Si stabilisca se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è secondo-numerabile.
 - (c) Si stabilisca se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è separabile.
6. Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]
 - (a) Uno spazio metrizzabile è separabile;
 - (b) Uno spazio separabile è metrizzabile;
 - (c) Uno spazio metrizzabile è primo-numerabile;
 - (d) Uno spazio primo-numerabile è metrizzabile.
7. Siano (X, \mathcal{S}) e (Y, \mathcal{T}) spazi topologici con (X, \mathcal{S}) primo numerabile e sia $f: X \rightarrow Y$. Allora f è continua in $x_0 \in X$ se e solo se per ogni successione $x_n \rightarrow x_0$ si ha $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. (si ragiona come negli spazi metrici: sia $\{B_n\}$ una base locale numerabile in x_0 tale che $B_n \subseteq B_{n'}$ se $n \leq n'$. Si supponga che f non sia continua in x_0 e si costruisca una successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \rightarrow x_0$ ma $f(x_n)$ non tenda a $f(x_0)$.)

8. Sia X lo spazio delle funzioni $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
- Per ogni $f_0 \in X$ consideriamo gli insiemi della forma $\mathcal{U}(f_0; x_1, x_2, \dots, x_n, \epsilon) = \{f \in X : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \epsilon\}$. Dimostrare che questi insiemi, al variare di $f_0 \in X$, $n \in \mathbb{N}$ e di $x_i \in [0, 1]$ formano una base per una topologia \mathcal{T} su X che viene detta “topologia della convergenza puntuale” (vedi punto seguente).
 - Dimostrare che una successione $\{f_k\}$ converge a f rispetto a \mathcal{T} se e solo se per ogni $x \in [0, 1]$ $f_k(x) \rightarrow f(x)$ in \mathbb{R} per $k \rightarrow +\infty$.
 - Dimostrare che (X, \mathcal{T}) non è primo numerabile.
 - Sia E il sottoinsieme delle funzioni caratteristiche dei sottoinsiemi finiti di $[0, 1]$. Quindi $f \in E$ se e solo se f è zero dappertutto eccetto in un numero finito di punti dove vale 1. Dimostrare che $f_0(x) = 1$ per ogni x appartiene alla chiusura di E .
 - Dimostrare che non esiste nessuna successione in E che converge a f_0 .
9. Sia \mathcal{K} la topologia cofinita su un insieme X .
- Si dimostri che per ogni $x \in X$ vale che $\cap\{A \mid x \in A \in \mathcal{K}\} = \{x\}$;
 - se \mathcal{N} è un sistema fondamentale di intorni di x allora $\cap\{N, N \in \mathcal{N}\} = \{x\}$;
 - se X non è numerabile come insieme, allora (X, \mathcal{K}) non è primo-numerabile.
10. (Manetti 6.8) Siano X e Y spazi primo-numerabili e di Hausdorff. Dimostrare che un'applicazione $f: X \rightarrow Y$ è continua se e solo se trasforma successioni convergenti in successioni convergenti.
11. Sia \mathcal{B} la famiglia dei sottoinsiemi di \mathbb{R} costituita da gli intervalli aperti (a, b) con $a < b$ in \mathbb{R} e dagli insiemi della forma $(a, b) \cap \mathbb{Q}$.
- Dimostrare che \mathcal{B} è una base per una topologia \mathcal{T} su \mathbb{R} che è strettamente più fine della topologia euclidea di \mathbb{R} .
 - Dimostrare che \mathbb{Q} è aperto in \mathcal{T} , e che l'insieme $F := \{x = \sqrt{2}/n, n \in \mathbb{N}\}$ è chiuso per \mathcal{T} .
 - Dimostrare che per ogni $B \in \mathcal{B}$ tale che $0 \in B$ si ha $\overline{B} \cap F \neq \emptyset$.
 - Concludere che (X, \mathcal{T}) non è T3. Quindi una topologia più fine di una topologia T3 può non essere T3.
12. Sia X uno spazio topologico T1: Dimostrare che sono equivalenti:
- Ogni sottoinsieme infinito di X ha almeno un punto di accumulazione;
 - Ogni successione $\{x_n\}$ in X ha almeno un punto di accumulazione.