<u>ESERCIZI 6</u>

L. Stoppino, corso di Geometria I, Università dell'Insubria, a.a. 2018/19

1. Siano A, B due aperti di uno spazio topologico. Dimostrare che se $A \cup B$ e $A \cap B$ sono connessi per archi, allora A e B sono connessi per archi.
2. Dimostrare che un sottoinsieme stellato di $\mathbb{R}^n$ è contraibile.
3. Dimostrare che il prodotto di due spazi contraibili è contraibile.
4. Dimostrare che il prodotto di due spazi semplicemente connessi è semplicemente connesso (si può dimostrare direttamente o anche si può usare l'esercizio (21)).
5. Dimostrare che la mappa antipodale $\underline{x} \mapsto -\underline{x}$ da S^n in sè è omotopa all'identità se n è dispari. (sugg. se $n = 2k - 1$ allora $S^n \subseteq \mathbb{R}^{2k} \cong \mathbb{C}^k$).
6. Dimostrare che ogni spazio topologico ha qualunque suo punto come retratto. Dimostrare che ogni spazio topologico contraibile ha qualunque suo punto come retratto debole di deformazione.
7. Se $Y \subseteq X$ è retratto di deformazione di X e $Z \subseteq Y$ è retratto di deformazione di Y, allora Z è retratto di deformazione di X.
8. Dimostrare che una corona circolare si retrae forte di deformazione su uno dei suoi bordi.
9. Mostrare che il bicchiere vuoto è un retratto di deformazione forte del bicchiere pieno. Più precisamente, mostrare che $Y = D^2 \times \{0\} \cup S^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ è un retratto forte di deformazione di $X = D^2 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$.
10. Dimostrare che uno spazio omotopicamente equivalente a uno spazio connesso (risp. connesso per archi) è anch'esso connesso (risp. connesso per archi).
11. Verificare che $\mathbb{R}^2$ meno due punti si retrae forte di deformazione sulla figura a otto.
12. Dimostrare che un triangolo pieno in $\mathbb{R}^2$ si retrae forte di deformazione su due suoi lati.
13. Dimostrare che in uno spazio $T2$ ogni retratto è chiuso.

14. Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale di dimensione m. Dimostrare che $\mathbb{R}^n \setminus W$ è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^{n-m} \setminus \{\underline{0}\}$.

15. Si consideri l'insieme X dei punti delle rette passanti per l'origine con pendenza razionale in $\mathbb{R}^2$, dotato della topologia indotta da quella euclidea:

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Dimostrare che

(a) X è connesso per archi ma non è localmente connesso per archi. (*localmente connesso per archi: ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni connessi per archi*).

(b) Il punto $(0, 0)$ è un retratto forte di deformazione di X (e in particolare X è contraibile).

(c) Ogni punto di X diverso da $(0, 0)$ è un retratto di deformazione, ma non un retratto forte di deformazione.

(d) Ogni punto di X diverso da $(0, 0)$ è un retratto di X (si veda (6)).

16. Vero o falso:

(a) Ogni retratto di deformazione è un retratto;

(b) ogni retratto debole di deformazione è un retratto;

(c) ogni retratto debole di deformazione in uno spazio T2 è chiuso;

(d) se $Y \subseteq X$ è un retratto di deformazione e $r\colon X \to Y$ la retrazione, l'omomorfismo indotto sui gruppi fondamentali è un isomorfismo;

(e) se $Y \subseteq X$ è un retratto e $r\colon X \to Y$ la retrazione, l'omomorfismo indotto sui gruppi fondamentali è un isomorfismo.

17. L'esercizio (15) fornisce un esempio di un retratto di deformazione che non è un retratto forte di deformazione. Fare un esempio di un retratto debole di deformazione che non è un retratto di deformazione.

18. Fare un esempio di un sottoinsieme di uno spazio topologico che è un retratto debole ma non un retratto (sugg: usare (13)).

19. Dati due archi α e β tra x e y in uno spazio topologico X dimostrare che $\alpha \sim \beta$ se e solo se $\alpha \star \overline{\beta} \sim \epsilon_x$.

20. Dimostrare che se $\pi_1(S^1, 1)$ fosse banale, allora per ogni spazio topologico X, per ogni $x_0 \in X$ avremmo che $\pi_1(X, x_0)$ sarebbe banale.

21. Dimostrare che dati due spazi topologici X e Y, e dati due punti $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ vale che $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

22. Sapendo che $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, calcolare il gruppo fondamentale del toro.

23. Sapendo che $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, calcolare il gruppo fondamentale della striscia di Möbius (sugg. vedere che ha S^1 come retratto forte di deformazione e usare che $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$).

24. Sia $Y \subseteq X$ è un retratto di uno spazio topologico X. Dimostrare le seguenti affermazioni.

    (a) Per ogni $y \in Y$ l'applicazione indotta dall'inclusione $i\colon Y \hookrightarrow X$ sui gruppi fondamentali
    $$i_*\colon \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X, y)$$
    è iniettiva.

    (b) Per ogni $y \in Y$ l'applicazione indotta dalla retrazione $r\colon X \to Y$ sui gruppi fondamentali
    $$r_*\colon \pi_1(X, y) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$$
    è suriettiva.

25. Con le ipotesi e notazioni dell'Esercizio 24, supponiamo che $i_*\pi_1(Y, y)$ sia un sottogruppo normale di $\pi_1(X, y)$. Dimostrare che $\pi_1(X, y)$ allora è il prodotto diretto dei sottogruppi $i_*\pi_1(Y, y)$ e $\ker r_*$.

26. Sapendo che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, dimostrare che la circonferenza S^1 non è un retratto del disco D^2 (sugg. usare l'Esercizio 24).

27. Sapendo che $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, dire se il gruppo fondamentale della figura a otto è banale o no. (sugg. usare l'Esercizio 24).

28. Dimostrare che se Y è retratto di deformazione di X, allora per ogni $y \in Y$, $i_*\colon \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X, y)$ è un isomorfismo.

29. Dimostrare che se $\varphi\colon X \to X$ è un'applicazione continua omotopa ad id_X, allora per ogni $x_0 \in X$ l'omomorfismo indotto $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, \varphi(x_0))$ è un isomorfismo.