Geometria I- Diario delle lezioni

L. Stoppino, Università dell'Insubria, a.a. 2015/2016

Martedì 29 settembre (2 ore).

Introduzione del corso. Definizione di spazio topologico. Primi esempi: 1) topologia discreta; 2) topologia euclidea su $\mathbb{R}$ 3) topologia concreta; 4) topologia della semicontinuità inferiore su $\mathbb{R}$;

Mercoledì 30 settembre (2 ore):

Chiusi di uno spazio topologico. Proprietà. Definizione di topologia cofinita. Topologie su insiemi finiti con pochi elementi. Topologie confrontabili, più o meno fini.

Spazi metrici: Definizione ed esempi (metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$, metrica discreta). Aperti negli spazi metrici e loro proprietà. Le bolle sono aperte.

Giovedì 1 ottobre (2 ore- esercitazioni) Esercizi dal primo foglio.

Martedì 6 ottobre (2 ore).

Gli aperti rispetto a una metrica sono le unioni di bolle.

Topologia indotta da una metrica: spazi metrizzabili.

Def. di topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$. Verifica che l'unica topologia metrizzabile su un insieme finito è la topologia discreta. Equivalenza tra metriche: due metriche d, d' su un insieme X si dicono topologicamente equivalenti se inducono la stessa topologia; si dicono equivalenti se $\exists\, \alpha, \beta > 0$ tali che

$$\alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y)$$

per ogni $x, y \in X$. Equivalenza $\Rightarrow$ equivalenza topologica, ma non vale il viceversa: si veda l'esercizio 10 del foglio 1.

Definizione di spazio di Hausdorff. Uno spazio metrizzabile è di Hausdorff.

Mercoledì 7 ottobre (2 ore)

Esercizio: La topologia indotta da una metrica è la meno fine delle topologie per cui le bolle sono aperte.

Base di una topologia. Esempi (bolle aperte per uno spazio metrico, i singoletti sono una base per la topologia discreta, esempi su uno spazio con tre elementi); Topologia indotta da una fabiglia di sottoinsiemi. Esempi. Teorema della base (quando una famiglia di aperti puo' essere base di una topologia: Teorema 3.7 del Manetti). Esempio importante: retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$. Verifica che la topologia $\mathcal{T}_s$ è strettamente più fine di quella euclidea $\mathcal{T}_e$ e strettamente meno fine di quella discreta $\mathcal{D}$.

Giovedì 8 ottobre (2 ore-esercitazioni Penegini)

Esercizi del primo foglio.

Martedì 13 ottobre (2 ore).

Topologia indotta o topologia del sottospazio. Sottospazi discreti: definizioni ed esempi.

Parte interna, chiusura e frontiera di un sottoinsieme. Esempi.

Mercoledì 14 ottobre (2 ore).

Definizione di intorno di un punto e di sistema fondamentale di intorni. Esempi. Richiami su applicazioni continue tra spazi metrici. Teorema: una funzione tra due spazi metrici è continua se e solo se la controimmagine di aperti è aperta. Continuità tra spazi topologici. Esercizio: le funzioni costanti sono sempre continue.

Giovedì 15 ottobre (2 ore-esercitazioni)

Esercizi del primo foglio.

Martedì 20 ottobre (2 ore).

Definizione di continuità con i chiusi. Esempio: funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{K}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{K})$.

La composizione di funzioni continue è continua.

Definizione di omeomorfismo. Verifica che dà una relazione di equivalenza.

Esercizi: 1) Con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}$, si ha che $(a, b) \sim (0, 1)$ per ogni $a < b$ (anche $a = -\infty$ e/o $b = +\infty$). 2) $id_X \colon (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ è continua se e solo se $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

La topologia indotta su un sottoinsieme (o topologia del sottospazio) è la più piccola topologia che rende continua l'inclusione.

Mercoledì 21 ottobre (2 ore):

Prop: f continua se e solo se $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$ per ogni sottoinsieme S del dominio.

Definizione di applicazioni aperte e chiuse. Esempi.

Lemma: se f è un'applicazione continua biiettiva e aperta/chiusa allora è un omeomorfismo.

Esercizio: classificazione degli intervalli di $\mathbb{R}$ a meno di omeomorfismo: cominciamo a porre la questione, e a vedere che $(a, b) \sim (0, 1)$ per ogni $a < b$ (anche $a = -\infty$ e/o $b = +\infty$). Come fare con gli altri casi?

Definizione di *proprietà topologica*: una proprietà che dipende solo dalla classe di omeomorfismo di uno spazio topologico.

Esempi: 1) essere metrizzabile è una proprietà topologica; 2) essere limitato rispetto a una metrica *non* lo è. 3) Essere T1, T2 è una proprietà topologica.

Giovedì 22 ottobre (2 ore-esercitazioni Penegini)

Martedì 27 ottobre (2 ore).

Topologia indotta da una applicazione sul codominio. Topologia quoziente. Funzioni suriettive e relazioni di equivalenza.

Contrazioni. Esempio: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)/S$ con $S = [0, 1)$, $S = (0, 1)$. Verifica che per $S = [0, 1]$ vale che $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)/S \sim (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

Mercoledì 28 ottobre (2 ore).

Proprietà universale della topologia quoziente. Identificazioni (Manetti).

Prop: una funzione continua suriettiva aperta (o chiusa) è un'identificazione.

Esempio: la contrazione $X \to X/S$ è aperta/ chiusa se e solo se S è aperto/ chiuso.

Esempi-esercizi: 1) funzione esponenziale $\mathbb{R} \to S^1$; 2) Figure ottenute come identificazione di figure piane. Cilindro come identificazione di $Q := [-1, 1]^2$

Giovedì 29 ottobre (2 ore- Esercitazioni).

Esercizi su topologia quoziente.

Martedì 3 novembre (2 ore).

Azioni di gruppo su uno spazio topologico. Quoziente per azione di gruppo. Gruppo di omeomorfismi. Esempi: 1) Considerato $\mathbb{Z}$ che agisce per traslazione su $\mathbb{R}$, vale che $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim S^1$. 2) gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$ e suoi sottogruppi $SL(n, \mathbb{R})$ e $SO(n, \mathbb{R})$. Esercizi.

Teorema: la proiezione al quoziente per una azione di gruppo è aperta. Se il gruppo è finito è anche chiusa.

Mercoledì 4 novembre (2 ore).

Teorema: Il quoziente di uno spazio T2 per un gruppo finito è T2.

Spazi proiettivi reali.

Topologia prodotto: la meno fine che rende continue le proiezioni. Base canonica.

Esempio: la topologia prodotto su $\mathbb{R}^2$ indotta dalla topologia euclidea sulle due componenti è la topologia euclidea.

Giovedì 5 novembre (2 ore- Esercitazioni).

Esercizi sulla topologia quoziente dal foglio 2.

Martedì 10 novembre (2 ore).

Teorema: Le proiezioni sono applicazioni aperte (ma non sempre chiuse). Inoltre per ogni $x \in X$ la fibra $p^{-1}(x)$ è omeomorfa a Y.

Prodotti infiniti. Topologia prodotto e topologia box: confronto (ref: Munkres).

Teorema: uno spazio topologico X è T2 se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto $X \times X$.

Corollario: se due funzioni contunue in uno spazio T2 coincidono su un sottoinsieme denso allora coincidono su tutto lo spazio.

Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.

Mercoledì 11 novembre (2 ore).

Toro descritto come identificazione dei bordi del quadrato: verifica che è omeomorfo a $S^1 \times S^1$.

Superfici di rotazione, e in genere figure ottenute per rotazione di figure piane in $\mathbb{R}^3$. Verifica che se $F \subseteq \{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$ è una figura piana che non interseca l'asse z allora il solido di rotazione che ottengo ruotandolo intorno all'asse z è omeomorfo a $F \times S^1$.

Assiomi di numerabilità per spazi topologici. Definizione di spazio 2-numerabile. Esempi.

Giovedì 12 novembre (2 ore- Esercitazioni Penegini).

Esercizi dal foglio 2.

Mercoledì 18 novembre (2 ore- Esercitazioni Penegini).

Esercizi dal foglio 3.

Giovedì 19 novembre (2 ore)

Definizione di spazio separabile. Esercizi: il prodotto di spazi separabili è separabile; non è detto che un sottospazio di uno spazio separabile sia separabile: $\{x + y = 0\} \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$.

Lemma 1: ogni spazio 2-numerabile è separabile. Lemma 2: uno spazio metrizzabile separabile è 2-numerabile.

Definizione di spazio 1-numerabile. Osservazioni: 2-numerabile $\Rightarrow$ 1-numerabile. Gli spazi metrici sono 1-numerabili.

Esempio importante: La retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ è 1-numerabile, separabile ma non è 2-numerabile. Dunque per il Lemma 2 non è metrizzabile.

Non è detto che uno spazio topologico tale che X è numerabile come insieme sia 2-numerabile come spazio topologico. Controesempio (idea).

Martedì 24 novembre (2 ore).

Connessione. Definizione e definizioni equivalenti. Esempio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è sconnesso.

Lemma: A aperto e chiuso di uno spazio topologico X. Se $Y \subseteq X$ è un sottospazio connesso, allora $Y \subseteq A$ oppure $Y \subseteq X \setminus A$.

Teorema: L'intervallo $[0, 1]$ è connesso con la topologia euclidea.

Mercoledì 25 novembre (2 ore).

Teorema: L'immagine continua di un connesso è connessa. (Corollario: la connessione è una proprietà topologica).

Definizione di connessione per archi (cpa). Verifica che cpa $\Rightarrow$ connesso, ma non vale il viceversa (esempio della pulce e il pettine).

Esercizio: sia $Y \subseteq X$ sottospazio connesso di uno spazio topologico. Se $W \subseteq X$ è tale che $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$, allora W è connesso. In particolare la chiusura di un sottospazio connesso è connessa.

Definizione di sottospazi convessi di $\mathbb{R}^n$. Osservazone: non è una proprietà topologica ma è utile perché convesso $\Rightarrow$ connesso.

Teorema: per un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ sono equivalenti le seguenti proprietà: S è convesso (cioè è un intervallo); S è connesso; S è connesso per archi.

Applicazioni: $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $[0,1] \not\simeq [0,1)$; $[0,1] \not\simeq (0,1)$.

Teorema: $f\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora esiste $x \in S^n$ tale che $f(x) = f(-x)$. Corollario: gli aperti di $\mathbb{R}$ non sono omeomorfi agli aperti di $\mathbb{R}^n$.

Teorema $f\colon X \longrightarrow Y$ continua e suriettiva, Y connesso, per ogni $y \in Y$ $f^{-1}(y)$ sia connesso, e f sia aperta oppure chiusa. Allora X è connesso. Corollario: il prodotto di spazi connessi è connesso.

Giovedì 26 novembre (2 ore- Esercitazioni).

Esercizi dal foglio 3.

Martedì 1 dicembre (2 ore).

Ricoprimenti. Definizioni ed esempi. Ricoprimenti aperti.

Definizione di spazi compatti. Esempi: $\mathbb{R}^n$ non è compatto. Uno spazio finito è sempre compatto. Uno spazio discreto è compatto se e solo se è finito. Uno spazio con la topologia concreta è sempre compatto.

Teorema: immagine tramite funzione continua di un compatto è compatta. Corollario: la compattezza è una proprietà topologica.

Teorema: $[0,1]$ è compatto.

Proposizione: chiuso in un compatto è compatto. Unione finita di compatti è compatta. Teo: Compatto in T2 $\Rightarrow$ è chiuso.

Giovedì 3 dicembre (2 ore- Esercitazioni Penegini).

Esercizi dal foglio 4.

Mercoledì 9 dicembre (2 ore).

Teorema di Heine-Borel: un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Corollario: ogni funzione continua da un compatto ad $\mathbb{R}$ ammette massimo e minimo.

Teorema: il prodotto finito di compatti è compatto.

Cenni al prodotto finito e al teorema corrispondente (Tychonoff).

Teorema: Una funzione continua da un compatto a un T2 è chiusa. Applicazioni.

Giovedì 10 dicembre (2 ore).

Esaustione in compatti e compattificazione di Alexandroff.

Verifica che la compattificazione di Alxandroff di $\mathbb{R}$ è omeomorfa a S^1.

Martedì 15 dicembre (2 ore).

Introduzione alla Topologia Algebrica.

Definizione di omotopia tra funzioni continue. Esempi: tutte le funzioni continue tra uno spazio qualsiasi e un sottospazio convesso di $\mathbb{R}^n$ sono omotope. Definizione di omotopia relativa a un sottospazio.

La mappa antipodale sulla sfera n-dimensionale $S^n \to S^n$ è omotopa all'identità se n è dispari (vedremo più avanti che non lo è se n è pari).

Definizione di equivalenza omotopica tra spazi topologici. Esempi: Due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti. Tutti i sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$, per ogni n, sono omotopicamente equivalenti.

Definizione di spazio contraibile (o contrattile).

Martedì 15 dicembre (2 ore- esercitazioni Penegini).

Esercizi dal foglio 4.

Mercoledì 16 dicembre (2 ore).

Esempi: un sottospazio convesso di $\mathbb{R}^n$ è contraibile.

Prop: X contraibile è connesso per archi.

Verifica che X è contraibile se e solo se la applicazione identica su X è omotopa alla applicazione costante $X \to X$ su qualunque punto di X.

Oss: vedremo nelle prossime ore che invece S^1 è connesso per archi ma non contraibile.

Retratti (forti e non) di deformazione e retratti. Definizioni (seguendo le notazioni del Kosniowski) ed esempi.

Esercizio: S^n è un retratto forte di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$.

Prodotti di cammini. (notazione $\alpha\star\beta$). Definizione ed esempi. Cammino inverso ad un cammino α: $\overline{\alpha}(t) := \alpha(1-t)$.

Equivalenza di cammini (notazione $\alpha \sim \beta$). Definizione ed esempi.

Prodotto sulle classi di equivalenza di cammini. Proprietà. Discussione su: cosa manca per farlo diventare un gruppo?

Giovedì 17 dicembre (2 ore).

Dato $x_0 \in X$ chiamo ϵ_x il cammino costante in x_0. Sia α cammino tra x e y in uno spazio topologico X.

Lemma 1: Vale che $\alpha \star \epsilon_y \sim \epsilon_x \star \alpha \sim \alpha$.

Lemma 2: Vale che $\alpha \star \overline{\alpha} \sim \epsilon_x$ e $\overline{\alpha} \star \alpha \sim \epsilon_y$.

Definizione di gruppo fondamentale o gruppo di Poincarè $\pi_1(X, x_0)$. Verifica che è un gruppo.

Teorema: Se esiste un arco γ tra x ed y in X allora c'è un isomorfismo di gruppi u_γ tra $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$.

Corollario: in uno spazio cpa la classe di isomorfismo del gruppo fondamentale non dipende dal punto base scelto. Osservazione: Quindi per uno spazio cpa X a volte scriveremo soltanto $\pi_1(X)$, ma attenzione che non c'è un isomorfismo *canonico*.

Definizione di spazio semplicemente connesso.

Gruppi fondamentali e mappe continue: l'omomorfismo indotto. Proprietà di funtorialità dell'omomorfismo indotto.

Esercizio: se $Y \subseteq X$ è un retratto di X allora i_* è iniettiva e r_* è suriettiva.

Martedì 22 dicembre (2 ore).

Teorema: (15.12 Kosniowski): mappe omotope danno luogo ad omomorfismi corrispondenti (modulo un isomorfismo).

Teorema: Se X e Y sono spazi topologici omotopicamente equivalenti allora i gruppi fondamentali sono omeomorfi.

Osservazione: il gruppo fondamentale è dunque un invariante omotopico.

Teo: Il gruppo fondamentale di uno spazio prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali.

Teo: Il gruppo fondamentale della circonferenza è $\mathbb{Z}$. Idea della dimostrazione.

Teorema di sollevamento delle mappe $f: I \to S^1$

Conseguenza: definizione della funzione "grado" di un cammino chiuso in S^1 puntato in 1.

Martedì 7 gennaio (2 ore).

Teorema (Van-Kampen baby) Sia X spazio topologico e siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due suoi aperti tali che $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Sia $x_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, e siano $i_*: \pi_1(\mathcal{U}, x_0) \to \pi_*(X, x_0)$ e $j_*: \pi_1(\mathcal{V}, x_0) \to \pi_*(X, x_0)$ gli omomorfismi indotti dalle inclusioni $i: \mathcal{U} \hookrightarrow X$ e $j: \mathcal{V} \hookrightarrow X$. Se $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ sono connessi per archi, allora il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ è generato dalle immagini di i_* e j_*.

Oss: la connessione per archi di $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ è necessaria: controesempio di S^1.

Corollario: se X è unione di sue aperti semplicemente connessi tali che l'intersezione è connessa per archi, allora X è semplicemente connesso.

Corollario: la sfera S^n per $n \geq 2$ è semplicemente connessa.