

## Geometria e Algebra- Diario delle lezioni

C.d.L. in Bioningegneria

L. Stoppino, Università di Pavia, a.a. 2018/2019

Tutti i riferimenti sono al testo [BBB] Fulvio Bisi, Francesco Bonsante, Sonia Brivio: *Lezioni di Algebra Lineare con Applicazioni alla Geometria Analitica*. Edizioni La Dotta - Casalecchio di Reno (BO).

Mercoledì 3 ottobre (11-13, 2 ore).

Preliminari:

- Teoria elementare degli insiemi. Insiemi dati per elenco e con una proprietà caratterizzante. Cardinalità di un insieme (notazione:  $|X|$  oppure  $\#(X)$ ). Concetto di sottoinsieme. Unione, intersezione, differenza tra insiemi. Insieme delle parti. Insiemi numerici  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .
- Logica matematica elementare: proposizioni e loro negazione. Connettivi logici: “e” =  $\wedge$  “o” =  $\vee$ . Quantificatore universale  $\forall$ , quantificatore esistenziale  $\exists$ . Esempi di proposizioni. Implicazione  $\Rightarrow$  tra proposizioni. Contronominale di una implicazione. Condizione necessaria e sufficiente (  $\Leftrightarrow$  ).
- Funzioni. Concetto di funzione tra due insiemi  $f: X \rightarrow Y$ . Funzioni iniettive, suriettive e biiettive. Controimmagine di un elemento del codominio:  $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$ .

Rif: [BBB] Cap.0 sezz.1.1, 1.2, 1.3, 1.5.

Giovedì 4 ottobre (11-13, 2 ore).

Ancora preliminari:

- Ancora su insiemi: prodotto cartesiano di insiemi.
- Funzioni: Verifica che  $f$  è iniettiva  $\Leftrightarrow \forall y \in Y \mid f^{-1}(y) \mid \leq 1$ . Verifica che  $f$  è suriettiva  $\Leftrightarrow \forall y \in Y \mid f^{-1}(y) \neq \emptyset$ . Insieme immagine  $im(f) = f(X)$ . Grafico di una funzione.  $f$  è suriettiva se e solo se  $f(X) = Y$ . Controimmagine di un sottoinsieme di  $Y$ . Restrizione di una funzione. Grafico di una funzione.

Venerdì 5 ottobre (14-15, 1 ora).

Definizione di vettore nello spazio. Spazio  $E_O^3$  dei vettori applicati nel punto  $O$ . Corrispondenza biunivoca fra punti dello spazio e vettori applicati in  $O$ . Addizione di vettori. Proprietà delle operazioni di addizione fra vettori.

Rif: [BBB] Cap.0 sez. 1.4 (solo fino a 0.9) e 1.5. Cap.1 sez.1.

Venerdì 5 ottobre (14-15, 1 ora).

Struttura di gruppo. Lo spazio  $E_O^3$  dei vettori applicati in un punto  $O$  è un gruppo con la somma di vettori.

Moltiplicazione per uno scalare; proprietà.

Traslazione di un vettore fissato dei punti dello spazio.

Span di un vettore non nullo: verifica che corrisponde alla retta generata da un vettore non nullo.

Rif: [BBB] Cap.1 sezz.1, 2.

Mercoledì 10 ottobre (11-13, 2 ore).

Dipendenza e indipendenza lineare di un insieme di 2 vettori di  $E_O^3$ .

Span di due vettori linearmente indipendenti  $v = \overrightarrow{OP}, w = \overrightarrow{OQ}$ : verifica che corrisponde al piano generato da  $O, P$  e  $Q$ .

Span di tre vettori linearmente indipendenti e basi di  $E_O^3$ .

Rappresentazione (coordinate) di un vettore su una base di  $E_O^3$ .

Riferimenti cartesiani ortogonali monometrici nello spazio; coordinate cartesiane.

Somma di vettori corrisponde alla somma di coordinate.

Rif: [BBB] Cap.1 sez. 2.

Giovedì 11 ottobre (11-13, 2 ore).

Sia fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico nello spazio.

Sia  $v \in E_O^3$  vettore di coordinate  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , il prodotto  $\alpha v$  ha coordinate  $(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in \mathbb{R}^3$ .

Rappresentazioni parametriche di rette e piani.

Equazioni di una retta in forma parametrica. Vettore direttore.

Equazioni di un piano in forma parametrica. Giacitura di un piano.

Esercizi. Rette e piani coordinati. Retta per due punti distinti, piano per tre punti non allineati).

Rif: [BBB] Cap.1 sez. 3 e 4.

Venerdì 12 ottobre (14-15, 1 ora).

Prodotto scalare

Proiezioni ortogonali di un vettore su una retta e su un piano.

Decomposizione unica di un vettore nelle due proiezioni ortogonali su retta e piano ortogonale alla retta.

Prodotto scalare: definizione, proprietà di positività, commutatività (simmetria), bilinearità (senza dimostrazione).

Rif: [BBB] Cap.1 sez. 4.

Mercoledì 17 ottobre (11-13, 2 ore).

Calcolo del prodotto scalare in termini delle coordinate cartesiane. Esempi ed esercizi.

Differenza fra vettori; distanza fra punti.

Equazione di un piano in forma cartesiana; vettore normale al piano.

Esempi. Passaggio da forma parametrica a forma cartesiana e viceversa per una rappresentazione di un piano.

Rif: [BBB] Cap.1 sez. 4 e 5

Giovedì 18 ottobre (11-13, 2 ore).

Posizione reciproca di piani nello spazio.

Equazioni di una retta in forma cartesiana.

Conversione da rappresentazione cartesiana a parametrica e viceversa per una retta.

Distanza fra punto e piano (con dimostrazione).

Posizioni reciproche di rette nello spazio.

Esercizi di geometria analitica.

Rif: [BBB] Cap.1 sezz. 5, 6 e 8.

Venerdì 19 ottobre (14-15, 1 ora).

Spazi vettoriali

Definizione.

Esempi:  $E_O^3$  Spazi vettoriali  $\mathbb{R}^n$  di vettori colonna. Polinomi in una variabile.

Rif: [BBB] Cap.2 sezz. 2 e 3.

Giovedì 25 ottobre (11-13, 2 ore).

Proprietà e proposizioni elementari per spazi vettoriali (leggi di annullamento, cancellazione, ecc.).

Esempi di sottospazi in  $E_O^3$ .

Sottospazi vettoriali: definizione.

Verifica che un sottospazio vettoriale è uno spazio vettoriale con la restrizione di somma e prodotto scalare-vettore.

Sottospazio vettoriale intersezione di due sottospazi vettoriali.

Rif: [BBB] Cap.2 sez. 4

Venerdì 26 ottobre (14-15, 1 ora).

Sottospazio vettoriale somma di due sottospazi vettoriali.

Controesempio: l'unione di due sottospazi in generale non è un sottospazio vettoriale.

Definizioni e dimostrazioni: l'intersezione e la somma sono sottospazi vettoriali; Esempi geometrici. Proprietà della somma di sottospazi. Esempi geometrici e in  $\mathbb{R}^n$ .

Rif: [BBB] Cap.2 sez. 4

Mercoledì 31 ottobre (11-13, 2 ore).

Sottospazio vettoriale generato da una lista di vettori (Span); proprietà fondamentali.

Combinazione lineare di vettori.

Esempi ed esercizi.

Rif: [BBB] Cap.2 sez. 5

Mercoledì 7 novembre (11-13, 2 ore).

Spazi vettoriali finitamente generati (esempio dello spazio dei polinomi a coefficienti reali in una variabile).

Dipendenza ed indipendenza lineare.

Definizioni equivalenti di indipendenza lineare e proprietà fondamentali.

Formulazione equivalente delle condizioni per l'indipendenza lineare (controllo “in cascata”).

Esercizi ed esempi.

Rif: [BBB] Cap.2 sezz. 5 e 6

Giovedì 8 novembre (11-13, 2 ore).

Definizione di base. Coordinate di un vettore su una base. Rappresentazione di un vettore di  $\mathbb{R}^n$  sulla base canonica. Esercizi.

Algoritmi di estrazione/completamento di basi di uno spazio vettoriale; teorema di esistenza della base.

Introduzione del teorema della base; definizione di dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato.

Proprietà fondamentale della base (aggiunta/cancellazione di vettori).

Lemma fondamentale di sostituzione. Proprietà di una lista di vettori indipendenti in uguale numero di una base.

Teorema della base (con dimostrazione).

Rif: [BBB] Cap.2 sezz. 7 e 8.

Venerdì 9 novembre (14-15, 1 ora).

Lemma fondamentale di dimensione per sottospazi di spazi finitamente generati.

Esempi: ricerca della base di un sottospazio vettoriale somma/intersezione di due sottospazi. Generatori e basi dei sottospazi somma e intersezione.

Formula di Grassmann (con idea di dimostrazione). Uso della formula di Grassmann.

Rif: [BBB] Cap.2 sezz. 8 e 9.

Mercoledì 14 novembre (11-13, 2 ore).

Matrici a entrate reali; vettori riga e vettori colonna.

Addizione fra matrici di uguale ordine, matrice nulla; proprietà; struttura di gruppo per  $M_{\mathbb{R}}(k, n)$ . Moltiplicazione di una matrice per uno scalare; proprietà. Spazio vettoriale delle matrici rettangolari  $M_{\mathbb{R}}(k, n)$ ; generatori, base canonica, dimensione.

Prodotto matrice-vettore come combinazione lineare delle colonne della matrice secondo le componenti del vettore.

Prodotto matrice-vettore e matrice-matrice; proprietà.

Rif: [BBB] Cap.3 sezz. 1 e 2.

Giovedì 15 novembre (11-13, 2 ore).

Interpretazione del prodotto fra matrici come prodotto “righe per colonne”. Proprietà associativa (senza dimostrazione), proprietà distributiva sulla somma di matrici, proprietà di omogeneità.

Il prodotto tra matrici quadrate. Discussione ed esempi.

Matrice identica: proprietà fondamentali.

Invertibilità; matrice inversa.

Proprietà della matrice inversa; inversa del prodotto e prodotto di matrici invertibili; legge di annullamento.

Teorema fondamentale per la matrice inversa (se le colonne della matrice sono linearmente indipendenti la matrice è invertibile). Esempi di calcolo di inversa.

Condizioni equivalenti di invertibilità (unicità della soluzione del sistema quadrato, indipendenza lineare delle colonne).

Calcolo delle colonne della matrice inversa come vettori coordinate degli  $e_i$  (base standard di  $\mathbb{R}^n$ ) rispetto alla base  $\mathcal{B}_A$  formata dalle colonne di  $A$ .

Rif: [BBB] Cap.3 sezz. 2 e 3.

Venerdì 16 novembre (14-15, 1 ora).

Somma diretta fra due sottospazi vettoriali.

Somma diretta di  $k$  sottospazi; definizione ed esempi.

Operazione di trasposizione e proprietà fondamentali.

Matrici simmetriche: verifica che formano un sottospazio vettoriale di  $M_{\mathbb{R}}(n)$ . Ricerca di una base per questo sottospazio.

Rif: [BBB] Cap.2 sez. 9 e Cap. 3 sez. 5.

Mercoledì 21 novembre (11-13, 2 ore).

Definizione ricorsiva di determinante (sviluppo sulla prima riga).

Esempio per il caso di una matrice quadrata di ordine 2, 3 e 4.

Teorema (formula) di Laplace per lo sviluppo secondo una riga o una colonna qualunque (senza dimostrazione).

Teorema per il determinante della matrice trasposta (idea della dimostrazione).

Matrici triangolari superiori, matrici triangolari inferiori, matrici diagonali.

Esempi di calcolo di determinante e di sue semplificazione mediante l'applicazione delle proprietà.

Proprietà caratteristiche fondamentali della funzione determinante. In particolare se le colonne di  $A$  sono dipendenti, allora  $\det A = 0$ .

Formulazione delle proprietà del determinante relativamente alle righe.

Rif: [BBB] Cap. 3 sez. 6.

Giovedì 22 novembre (11-13, 2 ore).

Teorema: caratterizzazione della funzione determinante.

Teorema di Binet (con idea della dimostrazione) e sue conseguenze: determinante di potenze di matrici quadrate; se le colonne di  $A$  sono indipendenti allora  $\det A \neq 0$ .

Conseguenza: una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

Esempi di calcolo di determinante e di sue semplificazioni mediante l'applicazione delle proprietà.

Teorema di Cramer per la matrice inversa (senza dimostrazione).

Rango di una matrice (dimensione del sottospazio generato dai vettori colonna).

Prime proprietà del rango.

Rango e minori: definizione di  $r_{MAX}$ .

Rif: [BBB] Cap. 3 sezz. 6 e 7.

Venerdì 23 novembre (14-15, 1 ora).

Teo: il rango coincide con  $r_{MAX}$  della matrice: teorema per il rango massimo dei minori non nulli (senza dimostrazione).

Regola di Kronecker degli orlati (senza dimostrazione).

Rango della matrice trasposta; conseguenze sulle righe di una matrice. Esempi; riduzione a scala.

Rif: [BBB] Cap. 3 sez. 7.

Mercoledì 28 novembre (11-13, 2 ore).

Regola di Kronecker degli orlati (senza dimostrazione).

Rango di una matrice con parametri: svolgimento esercizio 3(a) del 16/01/18.

Sistemi lineari; notazione matriciale. Sistemi lineari risolvibili; esempi di sistemi risolubili e non, esempi geometrici.

Sistemi lineari omogenei; risolubilità dei sistemi omogenei.

Teorema di Rouché-Capelli (con dimostrazione).

Risoluzione esercizio 3(b) del 16/01/18

Rif: [BBB] Cap. 4 sezz. 1 e 2.

Giovedì 29 novembre (11-13, 2 ore).

Unicità della soluzione

Regola di Cramer per la soluzione di un sistema quadrato non singolare (con traccia della dimostrazione).

Sistemi equivalenti ed operazioni elementari sulle righe.

Sistemi lineari: primo teorema di struttura: l'insieme delle soluzioni di  $AX = 0$  è un sottospazio vettoriale, il nucleo  $\ker A$  (con dimostrazione).

Equazioni cartesiane di un sottospazio vettoriale.

Teo: ogni sottospazio vettoriale di dimensione  $d$  di  $\mathbb{R}^n$  si rappresenta con  $n - d$  equazioni lineari omogenee indipendenti in  $x_1, \dots, x_n$ .

Teorema delle dimensioni per il nucleo di una matrice (la dimostrazione seguirà dal teorema delle dimensioni per una applicazione lineare).

Rif: [BBB] Cap. 4 sezz. 3, 4, 5 e 8.

Venerdì 29 novembre (14-15, 1 ora).

Varietà lineare (sottospazio affine); secondo teorema di struttura per le soluzioni di un sistema lineare di  $k$  equazioni in  $n$  incognite. Esempi di applicazione del teorema di struttura per sistemi lineari, esempi geometrici.

Discussione di sistemi lineari parametrici (a un parametro): esercizio 3 del 22/09/17.

Rif: [BBB] Cap. 4 sez. 5 e 7.

Mercoledì 5 dicembre (11-13, 2 ore).

Sistemi triangolari non singolari, risoluzione all'indietro; triangolazione di un sistema quadrato non singolare (algoritmo di Gauss). Matrici a scala. Lemma del rango. Eliminazione di Gauss per sistemi lineari qualunque e riduzione a sistemi a scala. Lemma dell'immagine e del nucleo di una matrice a scala. Esempi di sistemi risolti mediante matrice a scala. Determinazione delle equazioni mediante la riduzione a scala.

Applicazioni lineari definite da una matrice fra spazi di vettori colonna reali: proprietà di linearità.

Rif: [BBB] Cap. 4 sezz. 6 e 7. e Cap. 5 sez. 1

Giovedì 5 dicembre (11-13, 2 ore).

Applicazioni lineari generali fra spazi vettoriali. Definizione ed esempi. Applicazioni lineari fra spazi vettoriali non finitamente generati (derivata). Immagine di un sottospazio vettoriale.

Sottospazi vettoriali nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.

Generatori del sottospazio immagine.

Iniettività e suriettività di una applicazione lineare.

Esempi di tema d'esame sulle app. lineari e applicazioni (esercizio 1 del testo 2 del 25/06/18).

Rif: [BBB] Cap. 5 sezz. 1, 2 e 3.

Venerdì 7 dicembre (14-15, 1 ora).

Teorema delle dimensioni con dimostrazione.

Applicazioni del teorema delle dimensioni:

- Teorema della dimensione del ker di una matrice.
- Iniettività di applicazioni lineari.

Isomorfismi: definizione, cn&s. Esempi di spazi vettoriali isomorfi. Esempio principale: isomorfismo di rappresentazione tra  $V$  spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  ed  $\mathbb{R}^n$  *una volta fissata una base  $\mathcal{B}$  di  $V$ .*

Rif: [BBB] Cap. 5 sez. 3 .

Mercoledì 12 dicembre (11-13, 2 ore).

L'inversa di una applicazione lineare è lineare (con dimostrazione) Isomorfismo di rappresentazione (coordinate di un vettore su una base). Conseguenze:

- 1) Equivalenza della dipendenza lineare per i vettori e per le loro rappresentazioni.
- 2) due spazi vettoriali della stessa dimensione sono isomorfi. Matrice di rappresentazione di un'applicazione lineare con dimostrazione; casi particolare dell'applicazione associata a una matrice data. Esempi di tema d'esame sulle app. lineari e applicazioni. Esempi di problemi sulle applicazioni lineari. Determinazione di nucleo e immagine di applicazioni lineari definite da matrici. Iniettività e suriettività di applicazioni lineari mediante la matrice rappresentativa.

Rif: [BBB] Cap. 5 sezz. 3 e 4.

Giovedì 13 dicembre (11-13, 2 ore).

Matrici di cambio di base di  $V$  come matrici associati all'isomorfismo identico con le due basi di  $V$ . Il problema del cambio di base dalla base di uno spazio vettoriale a una seconda base generica. Matrici di rappresentazione di un'applicazione lineare su basi differenti.

Matrici equivalenti e rappresentazioni su basi diverse di un operatore lineare di uno spazio vettoriale  $V$  in sé.

Teorema: due matrici dello stesso ordine sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango (solo enunciato).

Lemma della traccia (dimostrazione caso  $2 \times 2$  esplicita e dimostrazione generale) e traccia di matrici simili.

Invarianti per similitudine: condizione necessaria, ma non sufficiente (con dimostrazioni e controesempio).

Rif: [BBB] Cap. 5 sezz. 5 e 6.

Venerdì 14 dicembre (14-15, 1 ora).

Problema di diagonalizzazione di operatori.

Autovalore ed autovettore per un operatore lineare qualunque.

Proprietà: a un autovettore è associato un solo autovalore.

Prop: dato  $f: V \rightarrow V$  operatore lineare, sono equivalenti:

- 1) esiste una base formata da autovettori di  $f$ ;
- 2)  $f$  si può rappresentare con una matrice diagonale.

Inoltre un operatore  $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è diagonalizzabile se e solo se la matrice  $A$  è simile ad una matrice diagonale.

Esempi: discussione sulla diagonalizzabilità per operatori  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Rif: [BBB] Cap. 6 sezz. 1, 2 e 3.

Mercoledì 19 dicembre (11-13, 2 ore).

Autospazi: definizione e proprietà. Molteplicità geometrica di un autovalore.

Teo: gli autospazi sono in somma diretta.

Prima condizione di diagonalizzabilità: che la somma delle molteplicità geometriche sia  $n$ .

Ricerca degli autovalori di una matrice: equazione caratteristica.

Esempi. Polinomio caratteristico e sue proprietà.

Polinomi caratteristici di matrici simili.

Divisione fra polinomi e teorema di Ruffini.

Risoluzione dell'esercizio 2 del testo 2 del compito del 22 settembre 2018.

Rif: [BBB] Cap. 6 sezz. 3 e 4.

Giovedì 20 dicembre (11-13, 2 ore).

Radici di un polinomio e molteplicità. Algoritmo di divisione fra polinomi (ripasso). Molteplicità di una radice di polinomio. Decomposizione di un polinomio in campo reale ed in campo complesso. Teorema fondamentale dell'algebra (enunciato); fattorizzazione in termini lineari e quadratici di un polinomio reale (senza dimostrazione). Esempi di fattorizzazione di polinomi in campo reale ed in campo complesso.

Molteplicità algebrica di un autovalore.

Teo: la molteplicità geometrica è minore o uguale di quella algebrica (con dimostrazione).

Definizione di autovalori regolari.

Seconda condizione necessaria di diagonalizzabilità di matrici (polinomio caratteristico totalmente decomponibile in campo reale).

Lemma della radice complessa coniugata (dimostrazione), e corollario della radice reale per polinomi di grado dispari (con dimostrazione). (Determinante di matrici a blocchi)

Rif: [BBB] Cap. 6 sezz. 4 e 5.

Venerdì 21 dicembre (14-15, 1 ora).

Prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$  e sue proprietà. Norma e distanza.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e disuguaglianza triangolare.

Definizione di angolo tra vettori in  $\mathbb{R}^n$ . Ortogonalità.

Mercoledì 9 gennaio (11-13, 2 ore).

Sistemi ortogonali ed ortonormali. Proprietà delle liste ortogonali.

Basi ortogonali ed ortonormali. Proprietà delle componenti di un vettore su base ortogonale o ortonormale; coefficienti di Fourier.

Proprietà delle basi ortonormali. Distanza tra vettori in  $\mathbb{R}^n$ .

Algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Proprietà delle basi ortogonali: formula di Parseval, teorema di Pitagora generalizzato.

Sottospazio ortogonale ad un insieme di vettori.

Rif: [BBB] Cap. 7 sezz. 1, 2, 3 e 4.

Giovedì 10 gennaio (11-13, 2 ore).

Proiezione ortogonale e sottospazio ortogonale di un sottospazio vettoriale: dimensione del complemento ortogonale; somma diretta.

Equazioni del complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale.

In generale: complementare di un sottospazio vettoriale; infinità di complementari di un sottospazio fissato; decomposizione unica nei due sottospazi complementari.

Esempi geometrici.

Matrici ortogonali; definizione e motivazione.

Condizione necessaria sul determinante di una matrice ortogonale. Caratterizzazione dei vettori righe/colonne di una matrice ortogonale.

Condizioni necessarie e sufficienti per una matrice ortogonale (colonne base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ ; conservazione del prodotto scalare; matrice di cambio di base fra basi ortonormali).

Matrici ortogonali  $2 \times 2$ . Gruppo ortogonale  $O(n)$  di ordine  $n$ .

Matrici simmetriche: teorema spettrale e suo corollario.

Rif: [BBB] Cap. 7 sezz. 4, 5, 6 e 7.

Venerdì 11 gennaio (14-15, 1 ora).

Esercizi sul teorema spettrale e sulla diagonalizzabilità.

Mercoledì 16 gennaio (11-13, 2 ore)

Forme quadratiche: definizione, matrice simmetrica associata, segnatura; forma canonica e segno di una forma quadratica; legame con gli autovalori.

Studio del segno di una forma quadratica, cambio di variabile per la riduzione a forma canonica.

Criterio dei minori incapsulati.

Esercizi di riepilogo.

Rif: [BBB] Cap. 8 sez. 1.

Giovedì 17 gennaio (11-13, 2 ore).

Esercizi di riepilogo.

Venerdì 18 gennaio (11-13, 2 ore).

Esercizi di riepilogo.