

Soluzioni di una versione dello scritto di Geometria e Algebra,
Esame telematico del 15 luglio 2020. Svolgimento della soluzione

Consideriamo la matrice:

L. Stoppiuo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quali dei seguenti sono autovettori di A ? $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Ricordiamo che un autovettore è un $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{x} \neq \underline{0}$ tale che $A\underline{x} \in \text{span}(\underline{x})$.

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ -4-6 \\ -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Quindi } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è autovettore}$$

non però all'autovalore -2

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ -4-6 \\ 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} \notin \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \text{non è autovettore}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è autovettore per definizione di autovettore

2) Devo trovare gli autovalori di A e le loro molteplicità.

Osservo che per ora so che -2 è autovalore e che

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore in V_{-2} .

polinomio caratteristico di A :

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 4 & 3 \\ -4 & -6-t & -3 \\ 3 & 3 & 1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-t & 4 & 3 \\ -2-t & -2-t & 0 \\ 3 & 3 & 1-t \end{vmatrix} \xrightarrow{2^a \text{ riga} + 1^a \text{ riga}} =$$

uso una semplice
fiorone per
reglio:

$$= (-2-t) \begin{vmatrix} 2-t & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1-t \end{vmatrix} = (-2-t) \left(- \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1-t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2-t & 3 \\ 3 & 1-t \end{vmatrix} \right)$$

linearità del determinante sulle righe

sviluppo lungo la seconda riga

$$= (-2-t) \left(-(4-4t) + \cancel{9} + (2-t)(1-t) - \cancel{9} \right) =$$

$$= (-2-t) \left(-4(1-t) + (2-t)(1-t) \right) = (-2-t) \left((1-t)(-4+2-t) \right)$$

$$= (-2-t)^2 (1-t)$$

Autovalori di A : -2 con $m_a(-2) = 2$
 1 con $m_a(1) = 1$

Ora vediamo la molteplicità geometrica.

Mi ricordo che dato $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore,

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Quindi $m_g(1) = 1$ senza dover fare i conti.

$$m_g(-2) = \dim \ker(A + 2I) = 3 - \text{rk}(A + 2I)$$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\text{rk}(A + 2I) = 2$ come si vede subito osservando

che la prima e la seconda colonna coincidono, mentre la terza è indipendente dalle prime due.

$$\text{Quindi } m_g(-2) = 3 - 2 = 1$$

3) Basi degli auto spazi:

→ So già che $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{-2}$, e per il punto precedente che $m_A(-2) = 1$ quindi $\dim(V_{-2}) = 1$, quindi

$$V_{-2} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \mathcal{B}_{V_{-2}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\rightarrow V_1 = \ker(A - I)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - I) = \begin{cases} x + 4y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 4x + 3z = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -3x + 3z = 0 \\ y = -x \end{cases} = \begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4) A non è diagonalizzabile: per verificarlo si può

→ usare la definizione: ho due auto spazi di dim 1 quindi non esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

→ Ricordare che condizione necessaria per la diagonalizzabilità è che tutti gli autovalori di A siano regolari, cioè $m_A(\lambda) = m_g(\lambda) \quad \forall \lambda \text{ autovalore}$, e osservare che $m_A(-2) = 2 \neq 1 = m_g(-2)$