In viola: domande su cui ci sono commenti alla fine

CATALOGO

Geometria e Algebra Appello del 5 febbraio 2019

☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0
☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1
☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2
☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3
☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4
☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5
☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6
☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7
☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8
☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere <u>una</u> o <u>più</u> risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

Esempi di risposte

Domanda [openspettraleA] Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(4)$ una matrice **simmetrica** 4×4 avente $1, -2$ e 5 come *unici* autovalori di A. Sia $V_{-2} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 2t - z = 0\}$ e $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Determinare una base dell'autospazio V_5, motivando la risposta. ☐w ☐p ☐a ■c

$V_5 = \text{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Base $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

Infatti, per il Teorema Spettrale $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_{-2} \oplus V_5$ e gli autospazi sono fra loro ortogonali: $\dim V_{-2} = 4 - \underbrace{2}_{\text{n° equazioni}}$ e $V_1 = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per le ipotesi; V_5 dunque ha dimensione 1 ed è ortogonale a V_{-2} e V_1. $V_{-2}^\perp = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow V_5 = V_{-2}^\perp \cap V_1^\perp = \text{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domanda [openspettraleB] Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(4)$ una matrice **simmetrica** 4×4 avente $2, 3$ e -4 come *unici* autovalori di A. Sia $V_3 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x+z = y+3t = 0\}$ e $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare una base dell'autospazio V_{-4}, motivando la risposta.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

$V_{-4} = \text{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ base $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ (e sono tra loro ortogonali)

Per teorema spettrale $\mathbb{R}^4 = V_2 \oplus V_3 \oplus V_{-4}$

V_3 ha dimensione $4-2=2$ e $V_2 = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_3^\perp = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ e $V_{-4} = V_3^\perp \cap V_2^\perp$

Domanda [openspettraleC] Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(4)$ una matrice **simmetrica** 4×4 avente $3, -4$ e 6 come *unici* autovalori di A. Sia $V_6 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ e $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare le equazioni dell'autospazio V_{-4}, motivando la risposta.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

$V_{-4} = \text{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ base : $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

Per teorema spettrale $\mathbb{R}^4 = V_3 \oplus V_{-4} \oplus V_6$ e sono ortogonali

V_6 ha dim 2 , e allora $V_3 = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_6^\perp = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

CATALOGO

Domanda [openspettraleD] Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(4)$ una matrice **simmetrica** 4×4 avente $-1, -2$ e 5 come *unici* autovalori di A. Sia $V_5 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ e $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-2\end{pmatrix}$. Determinare le equazioni dell'autospazio V_{-2}, motivando la risposta.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

$V_{-2} = \text{span}\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix}$ base: $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$

Infatti, per il teorema Spettrale $\mathbb{R}^4 = V_{-1} \oplus V_{-2} \oplus V_5$ e gli autospazi sono tra loro ortogonali: dunque $V_5 =$ ... $V_{-1} = \text{span}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}$ per ipotesi.

$V_5^{\perp} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$ e $V_{-2} = V_{-1}^{\perp} \cap V_5^{\perp}$

Domanda [questlinapplsA] Dimostrare che il nucleo $\text{Ker}\, L$ di un'applicazione lineare $L\colon V \to W$ è un sottospazio di V.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

$L: V \to W$ applicazione lineare

$\ker L = \{v \in V \mid L(v) = 0_W\}$. Per verificare che $\ker L$ è un sottospazio di V devo verificare che

1) è chiuso rispetto alla somma di vettori: $\forall v, v' \in \ker$ $v + v' \in \ker L$: siano v, v' tali che $L(v) = 0_W = L(v')$ allora $L(v + v') = L(v) + L(v') = 0_W + 0_W$ (per linearità)

2) è chiuso rispetto al prodotto scalare-vettore: sia $v \in \ker L$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ $L(\lambda v) = \lambda L(v) = \lambda 0_W = 0_W$ $\Rightarrow \lambda v \in \ker L$

Domanda [questlinapplsB] Dati U e W sottospazi vettoriali di V, dimostrare che $U \cap W$ è un sottospazio di V.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

$U, W \subseteq V$ sottospazi

$U \cap W = \{v \in V$ t.c. $v \in U$ e $v \in W\} \supseteq \{0_V\}$

Verifico che $U \cap W$ è chiuso per somma e prod. scalare-vettore:

1) Siano $v, v' \in U \cap W$ allora $v + v' \in U$ perché U è sottosp. e $v + v' \in W$ perché W è sottospazio $\Rightarrow$ $v + v' \in U \cap W$

2) Siano $v \in U \cap W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda v \in U$ perché U è sottospazio e $\lambda v \in W$ perché W è sottospazio. Dunque $\lambda v \in U \cap W$.

Domanda [questlinapplsC] Siano V e W spazi vettoriali; dare la definizione generale di applicazione lineare $L: V \to W$.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

V, W spazi vettoriali $L: V \to W$ applicazione si dice lineare se:
1) $\forall\ v, v' \in V$ $L(v+v') = L(v) + L(v')$
2) $\forall v \in V$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $L(\lambda v) = \lambda L(v)$

Domanda [questlinapplsD] Sia V uno spazio vettoriale; dare la definizione generale di sottospazio vettoriale di V.

☐ w ☐ p ☐ a ■ c

V spazio vettoriale
Un sottoinsieme $W \subseteq V$ non vuoto si dice sottospazio se:
1) $\forall\ w, w' \in W$ $w + w' \in W$
(è chiuso rispetto alla somma)
2) $\forall w \in W$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda w \in W$
(è chiuso rispetto al prodotto scalare-vettore)

Domanda [inversadnA] Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazione è corretta?

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ A non è invertibile.

Domanda [inversadnB] Sia $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazione è corretta?

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■ A non è invertibile.

Domanda [inversadnC] Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazione è corretta?

- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ■ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ A non è invertibile.

Domanda [inversadnD] Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazione è corretta?

- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ■ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- ☐ A non è invertibile.

Domanda [coordbasisdnA] Quale fra le seguenti affermazioni è corretta, sapendo che $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$?

- ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \\ -3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domanda [coordbasisdnB] Quale fra le seguenti affermazioni è corretta, sapendo che $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$?

- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \\ -3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$
- ■ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ -3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domanda [coordbasisdnC] Quale fra le seguenti affermazioni è corretta, sapendo che $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ ha coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$?

- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$
- ■ $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3)$
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ -3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domanda [coordbasisdnD] Quale fra le seguenti affermazioni è corretta, sapendo che $u \in \mathbb{R}^3$ ha coordinate $[u]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$?

- [x] $u = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$
- [ ] $u \in \text{Span}(v_1, v_2)$
- [ ] $u = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ -3 \end{pmatrix}$
- [ ] $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domanda [ortonormA] ♣ Sia $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ un sistema ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^4$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

- [x] Esiste una base ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^4$ che contiene $\{Y_1, \dots, Y_k\}$.
- [x] I vettori $Y_1, \dots, Y_k$ generano un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione k.
- [ ] $k \geq 4$.
- [x] $Y_1 \neq \mathbf{0}$.

Domanda [ortonormB] ♣ Sia $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ un sistema ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^n$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

- [x] $n \geq 4$.
- [x] $Y_4 \neq \mathbf{0}$.
- [ ] I vettori Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sono linearmente dipendenti.
- [ ] Y_1 è ortogonale a $(Y_1 + Y_3)$.

Domanda [ortonormC] ♣ Sia $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ un sistema ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^4$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

- [ ] $k = 5$.
- [x] I vettori $Y_1, \dots, Y_k$ sono linearmente indipendenti.
- [x] $k \leq 4$.
- [x] $Y_1 \neq \mathbf{0}$.

Domanda [ortonormD] ♣ Sia $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ un sistema ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^n$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

- [ ] $n \leq 3$.
- [x] $Y_3 \neq \mathbf{0}$.
- [ ] $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.
- [x] Y_1 è ortogonale a $(Y_2 + Y_3)$.

Domanda [geometriadnA] ♣ Stabilire per quali dei seguenti sistemi l'insieme delle soluzioni è un **piano** nello spazio:

- [x] $\begin{cases} x - y + z = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$
- [x] $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 6 \end{cases}$

Domanda [geometriadnB] ♣ Stabilire per quali dei seguenti sistemi l'insieme delle soluzioni è **vuoto**:

- [ ] $\begin{cases} x - y + z = 0 \end{cases}$
- [x] $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 5 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} y = 3 \end{cases}$

Domanda [geometriadnC] ♣ Stabilire per quali dei seguenti sistemi l'insieme delle soluzioni è una **retta** nello spazio:

□ $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3x + 6y + 3z = 2 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$

■ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Domanda [geometriadnD] ♣ Stabilire per quali dei seguenti sistemi l'insieme delle soluzioni è un **piano** nello spazio:

■ $\begin{cases} x - y - 2z = 0 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 3x - 3y - z = 3 \end{cases}$

□ $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$

■ $\begin{cases} z = -2 \end{cases}$

Domanda [autoA] ♣ Si consideri la seguente matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ e si stabilisca quali delle seguenti affermazioni è corretta:

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore 6.

□ Il vettore nullo è autovettore di A.

□ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore 12.

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

Domanda [autoB] ♣ Si consideri la seguente matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & -4 & -10 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e si stabilisca quali delle seguenti affermazioni è corretta:

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore 8.

□ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

□ $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore 16.

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

Domanda [autoC] ♣ Si consideri la seguente matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ e si stabilisca quali delle seguenti affermazioni è corretta:

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore 4.

□ Il vettore nullo è autovettore di A.

□ $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore 12.

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

Domanda [autoD] ♣ Si consideri la seguente matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ e si stabilisca quali delle seguenti affermazioni è corretta:

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore -4.

■ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

□ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di A.

□ $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore -8.

Domanda [canfquadA] ♣ Data la forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quali delle espressioni seguenti sono una sua possibile forma canonica $q_c(x', y', z')$?

- ■ $(x')^2 + (y')^2 - 5(z')^2$.
- ■ $(x')^2 - 5(y')^2 + (z')^2$.
- □ $(x')^2 - 5(y')^2 - 5(z')^2$.
- □ $-2(x')^2 + 3(y')^2 + (z')^2$.

Domanda [canfquadB] ♣ Data la forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, quali delle espressioni seguenti sono una sua possibile forma canonica $q_c(x', y', z')$?

- ■ $4(x')^2 - 2(y')^2 - 2(z')^2$.
- ■ $-2(x')^2 - 2(y')^2 + 4(z')^2$.
- □ $-2(x')^2 + 4(y')^2 + 4(z')^2$.
- □ $-2(x')^2 - 3(y')^2 + (z')^2$.

Domanda [canfquadC] ♣ Data la forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, quali delle espressioni seguenti sono una sua possibile forma canonica $q_c(x', y', z')$?

- ■ $(x')^2 + 3(y')^2 + (z')^2$.
- ■ $3(x')^2 + (y')^2 + (z')^2$.
- □ $(x')^2 + 3(y')^2 + 3(z')^2$.
- □ $(x')^2 - (y')^2 + 2(z')^2$.

Domanda [canfquadD] ♣ Data la forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, quali delle espressioni seguenti sono una sua possibile forma canonica $q_c(x', y', z')$?

- ■ $4(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2$.
- ■ $4(x')^2 + 4(y')^2 + 2(z')^2$.
- □ $2(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2$.
- □ $3(x')^2 - (y')^2 + 4(z')^2$.

Compito del 5 febbraio 2019

Geometria e algebra

Commenti sulla teoria: Lidia Stoppino

1

[Open spettrale A] $A \in M_{\mathbb{R}}(4)$ simmetrica con autovalori $1, -2, 5$

$V_{-2} = \begin{cases} x-y=0 \\ 2t-z=0 \end{cases}$ (due equazioni indipendenti) $\Rightarrow \dim V_{-2} = 4-2 = 2$

$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore 1

cioè $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \in V_1$ ⊛

[A è simmetrica dunque so che vale il teorema spettrale che mi dice che $(*)$ $\boxed{\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_{-2} \oplus V_5}$ (cioè che c'è una base di autovettori di A) e che gli autospazi sono ortogonali tra loro]

quindi

$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim V_1 + \underbrace{\dim V_{-2}}_{=2} + \dim V_5 \Rightarrow \dim V_1 = \dim V_5 = 1$

e V_5 è generato da un vettore ortogonale a V_{-2} e a V_1

$V_{-2}^{\perp} = \{\text{vettori ortogonali a } V_{-2}\} = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$

prendo i coefficienti delle equazioni che definiscono V_{-2}

e ora osservo che

$\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix} \perp V_1$ perché siccome $\dim V_1 = 1$

$V_1 = \text{span}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ per ⊛

quindi $V_5 = \text{span}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$

Domanda [Inversa di A]

<u>Osservazione</u>: calcolare l'inversa di A <u>non è</u> la strada più economica.

Ecco una possibile strategia che <u>minimizza</u> i conti da fare:

Faccio queste osservazioni:

- A è triangolare superiore, quindi det A si calcola facilmente come prodotto degli elementi sulla diagonale, quindi det $A=2$

  questo mi dice subito che A è invertibile (quindi l'ultima risposta sbagliata)

- La prima matrice proposta ha determinante $=2$ ma se fosse l'inversa di A dovrei avere $\det = 1/2$

- le altre 2 matrici differiscono per l'ultima colonna quindi basta controllare se

  $A \cdot (\text{quella colonna})$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ come dovrebbe essere se la matrice fosse l'inversa.

ora

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-8+2 \\ * \\ * \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non calcolo neanche le altre entrate!

Siccome ho escluso la prima, la seconda e la quarta risposta, la terza deve essere quella giusta (fine)

Domanda [coord basis nd A] 3

<u>OSS</u>: In questo tipo di domande non dovete memorizzare un procedimento, ma solo ricordare la definizione di coordinate:

Data $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

il vettore coordinate di $v \in V$ rispetto a $\mathcal{B}$

è $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dove

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

(cioè gli x_i sono i coefficienti dei v_i che ottengo scrivendo v come combinazione lineare degli elementi della base)

quindi, nell'esercizio, se

$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ciò <u>significa</u> che

$$u = 4v_1 + 3v_2 + 2v_3$$

ora sostituisco v_1, v_2 e v_3:

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \\ -3 \end{pmatrix}$$ <u>Fine</u>.

Domanda [ortonorm A] Attenzione! Il simbolo ♣ 4

ci dice che ci possono essere due o più risposte

vere !

Per rispondere a questa domanda devo ricordare: (la teoria)

1 • La definizione di sistema ortogonale:

un sistema ortogonale di vettori in $\mathbb{R}^n$

$\{Y_1, \dots, Y_k\}$ è una lista di vettori non nulli

tali che $Y_i \perp Y_j \quad \forall i \neq j$

(ovvero tali che $\langle Y_i, Y_i \rangle \neq 0$ e $\langle Y_i, Y_j \rangle = 0$ se $i \neq j$)

2 • il fatto che se $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ è Sistema ortogonale allora gli $\{Y_1 \dots Y_k\}$ sono linearmente indipendenti

e ciò equivale a dire che

$$\dim(\text{span}(Y_1, \dots, Y_k)) = k$$

3 • il fatto che dato un sistema ortogonale $\{Y_1, \dots, Y_k\}$, lo posso sempre completare ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$: cioè aggiungere vettori $\{Y_{k+1}, \dots, Y_n\}$ tali che $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ è base ortogonale di $\mathbb{R}^n$

Quindi, la prima affermazione è vera per (3)

la seconda è vera per (2)

La terza invece è Falsa perché per (2) ho

$k = \dim(\text{span}(Y_1 \dots Y_k))$ ma $\text{span}(Y_1 \dots Y_k) \subseteq \mathbb{R}^4$

dunque $\boxed{k \leq 4}$

La quarta affermazione è vera per la definizione (1)

Domanda [geometria dnA] ♣

Qui basta ricordare che un piano nello spazio è rappresentato da 1 equazione cartesiana lineare $ax+by+cz+d=0$

però se ho due (o più) equazioni che sono tutte multiple l'una dell'altra le soluzioni sono ancora 1 piano. Dunque

la prima e la quarta espressione rappresentano un piano, la seconda e la terza no:

$x-y+z-2$ non è proporzionale a $3x-3y+3z-1$

e $x-y+z-2$ " " " " $2x+y-z=$

Domanda [autoA]

Qui bisogna solo sapere la definizione di autovettore e autovalore: in questo contesto $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ è autovettore se $\underline{x} \neq \underline{0}$ e $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tale che $A\underline{x} = \alpha \underline{x}$.

tale α si chiama autovalore associato all'autovettore $\underline{x}$

quindi:

$\longrightarrow$ $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+2\\5+4-3\\2-2+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sì è autovettore con autovalore 6

$\longrightarrow$ $\underline{0}$ non è autovettore per def

$\longrightarrow$ $A\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\12\\12\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ è autovettore Ma non con autovalore 12! con lo stesso autovalore 6

OSS: in generale se $\underline{x}$ è autovettore con autovalore α allora qualunque multiplo di $\underline{x}$ (non nullo) è autovettore con lo stesso autovalore α!

$\longrightarrow$ $A\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-4\\5-8+3\\2+4-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ sì è autovettore (con autovalore 0)

Domanda [f quad can A] ♣ 6

Dobbiamo ricordare che in generale
$q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma quadratica è della forma
$q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ con A simmetrica $n \times n$
e che la forma canonica di q è del tipo
$q(\underline{x}') = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$
dove $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono gli autovalori di A (con le loro molteplicità)

Dunque la domanda si può riformulare così:
quale delle seguenti matrici simmetriche ha
$1, 1, -5$ come autovalori (contati con molteplicità)
cioè ha 1 e -5 come autovalori con
$\mu(1) = 2$ e $\mu(-5) = 1$

(sto implicitamente usando che ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile, cioè il teorema spettrale, quindi $\mu(\alpha) = m(\alpha)$ cioè molt. geom. e algebrica coincidono!)

Basta guardare il polinomio caratteristico:

→ per la prima è $P_A(t) = \begin{vmatrix} -2-t & 3 \\ 3 & -2-t \end{vmatrix}(1-t) = [(t+2)^2 - 9](1-t) =$
$= (t^2+4t-5)(1-t) = (t+5)(t-1)(1-t)$
OK

→ per la seconda $[(-3-t)^2 - 4](1-t) = (t^2+6t+5)(1-t) =$
$= (t+5)(t+1)(1-t)$
NO ha -1 come autovalore

→ per la terza: sì è già diagonale della forma che cerchiamo

→ la quarta ha autovalori -5 e 1 ma con molteplicità
$\mu(-5) = 2$ e $\mu(1) = 1$ NON va!