Geometria e Algebra 29 nevoso CCXXVII RF (terza decade, nonidì)

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere <u>una</u> o <u>più</u> risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

Stoppino Lidia

Domanda 1 Dare la **definizione** di lista di generatori di uno spazio vettoriale V. Fornire un esempio di una lista di generatori di $\mathbb{R}^3$ che sia formata da 6 vettori distinti. ☐w ☐p ☐a ☐c

Una lista di generatori di uno spazio vettoriale V è un insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ di vettori di V tali che $\forall v \in V$ $\exists a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tali che $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k$

$\{e_1; e_2; e_3; e_1+e_2; e_1+e_3; e_2+e_3\}$ e_i base canonica di $\mathbb{R}^3$

Domanda 2 Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice **simmetrica** 3×3. Sapendo che 3 e 7 sono *gli unici* autovalori di A e che $V_3 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = y + 2z = 0\}$, determinare la dimensione e una base dell'autospazio V_7. Giustificare la risposta. ☐w ☐p ☐a ☐c

A simmetrica per il teorema spettrale equivale a dire che gli autospazi di A generano $\mathbb{R}^3$ e sono mutuamente ortogonali. Dunque $3 = \dim V_3 + \dim V_7$ $\Rightarrow \dim V_7 = 2$ base di V_7 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Domanda 3 ♣ Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare e tale che $\operatorname{Ker} L = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = x - y = 0\right\}$. Allora

- [ ] L non è né iniettiva, né suriettiva.
- [ ] L è biunivoca.
- [ ] L è iniettiva, ma non suriettiva.
- [x] L è suriettiva, ma non iniettiva.

Domanda 4 Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi\colon x - y + z = 0$?

- [ ] $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$
- [x] $\begin{cases} x - z = 3 \\ y + z = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

Domanda 5 ♣ Siano U e V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$; sia $\dim U = 2$ e $\dim V = 4$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** corrette?

- [ ] $\dim(U \cap V) = 2$.
- [ ] $\dim(U \cap V) \geq 3$.
- [x] $\dim(U + V) \geq 4$.
- [x] U e V *non* sono in somma diretta.

Domanda 6 Quale fra le seguenti affermazioni è corretta se si considera la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, e $u \in \mathbb{R}^3$ è tale che $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$?

- [ ] non è possibile determinare u.
- [ ] $u \in \operatorname{Span}(v_1, v_2)$
- [x] $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$
- [ ] $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Domanda 7 ♣ Stabilire quale delle seguenti espressioni $q(x, y)$ corrisponde a una forma quadratica in $\mathbb{R}^2$ *definita* positiva:

- [ ] $q(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4xy$
- [ ] $q(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$
- [x] $q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy$
- [ ] $q(x, y) = 4x^2 + 4y^2 + 10xy$

Domanda 8 ♣ Sia A una matrice 3×3 e siano A^1, A^2, A^3 le colonne di A. Se $\det A = 0$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- [x] $\det(A^1 | -A^2 | 2A^3) = 0$.
- [x] I vettori $\{A^1 + A^2, A^2, A^3\}$ sono linearmente dipendenti.
- [ ] I vettori $\{A^1, A^2, A^3\}$ sono linearmente indipendenti.
- [ ] È impossibile calcolare $\det(A^1 + A^2 | A^2 | A^3)$.