

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	18 febbraio 2020
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome! ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1-k & 2+k \\ k & 1+k & 1 & -k \\ k & k & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

- Determinare il rango di A al variare di k ;
- Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni;
- Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2;
- Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
-1	2	3	no	—
0	2	2	sì	2
2	2	3	no	-
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -1, 0, 2 \\ 2 & \text{se } k = 0, 2, -1. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k \neq -1, 2$.

$\dim \text{Sol} = 2$ per $k = 0$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (8 pt) Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xz + 2yt$.

(a) Scrivere la matrice associata a q .

(b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

(c) Determinare la matrice M tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

(d) Discutere il segno di q .

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q = 2(x')^2 + 2(z')^2$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

q è semidefinita positiva.

3. (8 pt) Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ nello spazio euclideo.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi := \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare a π passante da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale di $P := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ su π .

(d) Determinare la distanza del punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ da π .

$$(a) 2x - y + 3z = 0 \quad (b) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y + z = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{pmatrix} 5/7 \\ 1/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} \quad (d) \frac{2\sqrt{14}}{7}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	18 febbraio 2020
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 2-k & 1+k \\ k-1 & k-1 & 0 & 1 \\ k & k-1 & 1 & 1-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Determinare il rango di A al variare di k ;
- Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni;
- Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1;
- Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
0	2	3	no	—
1	2	2	sì	2
3	2	3	no	-
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0, 1, 3 \\ 2 & \text{se } k = 0, 1, 3. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k \neq 0, 3$.

$\dim \text{Sol} = 1$ per $k \neq 0, 1, 3$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (8 pt) Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = 4x^2 - y^2 + z^2 - 4t^2 + 4xz + 4yt$.

(a) Scrivere la matrice associata a q .

(b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

(c) Determinare la matrice M tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

(d) Discutere il segno di q .

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$q = 5(x')^2 - 5(z')^2$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

q è indefinita.

3. (8 pt) Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ nello spazio euclideo.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi := \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare a π passante da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale di $P := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ su π .

(d) Determinare la distanza del punto $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ da π .

$$(a) x + y - 2z = 0 \quad (b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{pmatrix} 7/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad (d) \frac{\sqrt{6}}{2}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	18 febbraio 2020
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome! ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} -2-k & 3+k & 1 & 2+k \\ 1 & 2+k & 0 & 2+k \\ 4+k & 1 & -1-k & 2+k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k+3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Determinare il rango di A al variare di k ;
- Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni;
- Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2;
- Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
-3	2	3	no	—
-2	2	2	sì	2
0	2	3	no	-
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -3, -2, 0 \\ 2 & \text{se } k = -3, -2, 0. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k \neq -3, 0$.

$\dim \text{Sol} = 2$ per $k = -2$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 3/4 \\ 13/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (8 pt) Si consideri la forma quadratica $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4xz + 4yt$.

(a) Scrivere la matrice associata a q .

(b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

(c) Determinare la matrice M tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

(d) Discutere il segno di q .

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$q = 5(y')^2 + 5(t')^2$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

q è semidefinita positiva.

3. (8 pt) Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ nello spazio euclideo.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi := \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare a π passante da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale di $P := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ su π .

(d) Determinare la distanza del punto $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ da π .

$$(a) 2x - 3y - z = 0 \quad (b) \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ y - 3z = -2 \end{cases} \quad (c) \begin{pmatrix} 9/7 \\ 4/7 \\ 6/7 \end{pmatrix} \quad (d) \frac{\sqrt{14}}{2}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	18 febbraio 2020
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome! ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} k & k-2 & -1-k & -1 \\ k & -1 & 0 & k \\ k & -k & -1 & k-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1-k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Determinare il rango di A al variare di k ;
- Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni;
- Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1;
- Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
1	2	3	no	—
0	2	2	sì	2
-2	2	3	no	-
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -2, 1, 0 \\ 2 & \text{se } k = -2, 1, 0. \end{cases}$$

Risolvibile per ogni $k \neq -2, 1$.

$\dim \text{Sol} = 1$ per $k \neq -2, 1, 0$.

Soluzione per $k = 2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ -1/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. (8 pt) Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = -4x^2 - 4y^2 - z^2 - t^2 + 4xz + 4yt$.

(a) Scrivere la matrice associata a q .

(b) Scrivere q in una forma canonica nelle variabili $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

(c) Determinare la matrice M tale che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

(d) Discutere il segno di q .

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$q = -5(y')^2 - 5(z')^2$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

q è semidefinita negativa

3. (8 pt) Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ nello spazio euclideo.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi := \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane della retta r perpendicolare a π passante da $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale di $P := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ su π .

(d) Determinare la distanza del punto $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ da π .

$$(a) x + 3y - z = 0 \quad (b) \begin{cases} x + z = 2 \\ 3z + y = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{pmatrix} 17/11 \\ -4/11 \\ 5/11 \end{pmatrix} \quad (d) \frac{4\sqrt{11}}{11}$$