Soluzioni compito 2 Luglio, Geometria e algebra, Bioingegneria

1) $A\underline{x} = \underline{b}$ $\qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & k \\ 1-k & -1-2k & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1+k \\ 0 \\ 2k+1 \end{pmatrix}$$

a) $\mathrm{rg}\,A_k$ (al variare di k in $\mathbb{R}$) ?

osservo che ad esempio $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è un minore 2x2 con $\det \neq 0$

dunque $\mathrm{rg}(A_k) \geq 2$

D'altra parte $\mathrm{rg}(A_k) \leq \min(\#\text{righe}, \#\text{colonne}) = 3$

Quindi il rango di A_k può essere 2 o 3

considero il minore 3x3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1-k & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

che ottengo da A_k togliendo la seconda colonna $[A_k]^2$

det di questa sottomatrice: $1 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{=0} + k \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$

$= k\,(2-2k-4) =$

$= k(-2k-2) = -2\,k(k+1)$

Dunque il det di questa sottomatrice è $\neq 0$ se $k \neq 0, -1$

Quindi $\mathrm{rg}\,A_k = 3$ se $k \neq 0,-1$ di sicuro.

Ora vediamo cosa succede per questi casi $k = 0, -1$

$k=0 \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

vedo subito che la 3^a riga è la somma di prima e seconda
dunque $rg\, A_0 = 2$

per $k = -1 \qquad A_{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

chiaramente
(seconda e terza riga sono uguali)
$rg\, A_{(-1)} = 2$

(b) $A_k \underline{x} = \underline{b}$ ammette soluzioni se e solo se $rg(\overbrace{A_k|\underline{b}}^{\tilde{A}_k}) = rg(A_k)$

per $rg\, A_k = 3$ che è massimo, ovviamente $rg\, \tilde{A}_k = 3$

per i due casi dove $rg A = 2$ devo controllare

$\boxed{k=0}$

$A_0 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e vale che $[A_0]_1 + [A_0]_2 = [A_0]_3$

$\underline{b} \in$ span delle colonne di A se e solo se

$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{b_1 + b_2 = b_3}$

nel nostro caso $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ quindi sì per $k=0$ il sistema ammette soluzioni.

per $\boxed{k=-1}$ come visto ho $[A_{(-1)}]_2 = [A_{(-1)}]_3$

quindi $\underline{b} \in$ span colonne se e solo se $b_2 = b_3$

nel nostro caso $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

3

(c) per quali valori di k il sistema ha soluzioni che sono uno spazio lineare di dim 2:

in generale se un sistema in n incognite $A\underline{x}=\underline{b}$ è risolubile

allora $\dim(\text{Soluzioni}) = n - rg(A) = n - rg(\tilde{A})$

Quindi nel nostro caso devo avere

$4 - rg(A) = 2$ cioè $\underline{rg(A)=2}$ (e $A\underline{x}=\underline{b}$ risolubile)

quindi questo vale se e solo se

$$\boxed{k=0}$$

d) sia $k=1$; determinare dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica.

In questo caso, $\dim(\text{soluzioni}) = 4 - rg(A_1) = 4-3=1$

Equazioni cartesiane:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y+w=2 \\ -3y+2z-w=0 \\ 2x+y+2z-w=3 \end{cases}$$

Riduco la matrice completa (con i termini noti) con il metodo di Gauss (ottenendo un sistema equivalente)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ \multicolumn{4}{c|}{3^a\text{ riga} - 2\,1^a\text{ riga}} & \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim$$

3^a riga $- 2^a$ riga

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Quindi ho ottenuto il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y + t = 2 \\ -3y + 2z - t = 0 \\ -2t = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + \frac{1}{2} = 2 \\ 3y = 2z - 1/2 \\ t = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{4}{3}z + \frac{1}{2} = 2 \\ y = \frac{2}{3}z - \frac{1}{6} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{4}{3}z + \frac{3}{2} \\ y = \frac{2}{3}z - \frac{1}{6} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

parametriche: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1/6 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$