Commenti sulla risoluzione dello scritto del 23 luglio 2019

Geometria e Algebra

Versione A

1) $A\underline{x}=\underline{b}$ $\quad \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\3+k&k&4&-3-k\\k-1&-3k&2k-1&1-k\end{pmatrix}$

$\underline{b}=\begin{pmatrix}1+k\\4+k\\-1\end{pmatrix}$

(a) cerco il rango di A in dipendenza da k

osservo che se prendo la sotto matrice

$\begin{pmatrix}0&1\\k&4\end{pmatrix}$ ha det $=-k$

dunque per $k\neq 0$ $rgA\geq 2$ (e ovviamente ≤ 3 perché A ha 3 righe)

per $k=0$ la sottomatrice $\begin{vmatrix}1&-1\\4&-3\end{vmatrix}$ ha det $\neq 0$

quindi $\boxed{rgA\geq 2}$ per ogni $k\in\mathbb{R}$.

Per capire quando $rgA=3$ calcolo il determinante della sottomatrice

$$\begin{vmatrix}1&\boxed{0}&1\\3+k&\boxed{k}&4\\k-1&\boxed{-3k}&2k-1\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}1&0&1\\3+k&1&4\\k-1&-3&2k-1\end{vmatrix}=$$

questa colonna è $k\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$

dunque uso la linearità del determinante sulle colonne

$$=k\left(\begin{vmatrix}1&4\\-3&2k-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3+k&1\\k-1&-3\end{vmatrix}\right)=$$

uso lo sviluppo di Lagrange rispetto alla prima riga

$$= -k\left(\left((2k-1)+12\right)+\left(-3(3+k)-(k-1)\right)\right) =$$

$$= k\,(2k+11-9-3k-k+1) = k\,(-2k+3)$$

Dunque questo determinante si annulla sse $k=0, 3/2$

Questo ci dice che se $k \neq 0, 3/2$ allora $rg A = 3$

Controlliamo i casi particolari:

$k=0$: $$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

poichè la quarta colonna $A^4 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (che avevo escluso per ottenere la sotto matrice di prima)

è anch'essa dipendente dalle prime tre $(A^4 = -A^1)$,

$rg A_0 = 2$

$k = 3/2$ $$A_{3/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 9/2 & 3/2 & 4 & -9/2 \\ 1/2 & -9/2 & 2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

devo controllare se $(A_{3/2})^4 \in span\left((A_{3/2})^1, (A_{3/2})^2, (A_{3/2})^3\right)$

$$A_{3/2} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

osserviamo che vale questa relazione tra le righe di $A_{3/2}$:

$$(A_{3/2})_3 = -3(A_{3/2})_2 + 14(A_{3/2})_1$$

dunque $rg A_{3/2} = 2$

Riassumendo:

$$\boxed{rg A = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0, 3/2 \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}}$$

(b) Sappiamo che vale il teorema di Rouché-Capelli sulla risolubilità dei sistemi lineari: $A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile se e solo se $rg(A) = rg(\tilde{A})$ dove $\tilde{A} = (A \mid \underline{b})$

se $rg A = 3$ perchè $\tilde{A}$ è la matrice 3×5 ottenuta da A aggiungendo 1 colonna $\Rightarrow rg(\tilde{A}) = 3$.

Vediamo i due casi $k = 0, 3/2$

per $\boxed{k=0}$ $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

per vedere se

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{span}(\text{colonne})$ (se ci appartiene $rg \tilde{A} = 2$, altrimenti è 3)

basta calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ che ovviamente è 0

$rg \tilde{A} = 2$ in questo caso il sistema è dunque risolubile

Per $\boxed{k = 3/2}$

$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 5/2 \\ 9/2 & 3/2 & 4 & -9/2 & 11/2 \\ 1/2 & -9/2 & 2 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right)$

Siccome abbiamo visto prima che

$$(A_{3/2})_3 = -3(A_{3/2})_2 + 14(A_{3/2})_1$$

basta vedere se i coefficienti di $\underline{b}$ rispettano queste relazione:

$$b_3 = -3/2 \qquad -3b_2 + 14b_1 =$$

$$= -\frac{33}{2} + \frac{70}{2} = \frac{37}{2} \neq b_3$$

Dunque in questo caso $rg(\hat{A}) = 3 \neq rg(A)$

Riassumendo, il sistema è risolubile se e solo se $\boxed{k \neq 3/2}$ [Attenzione: chiediamo i $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è risolubile quindi li devo trovare tutti]

c) Sappiamo inoltre che quando il sistema è risolubile

$$\dim(\text{Soluzioni}) = \#\text{variabili} - rg A$$

Quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni è

$$4-3 = 1 \quad \text{sse} \quad k \neq 0, 3/2$$

$$4-2 = 2 \quad \text{sse} \quad k = 0$$

(Ripeto: per $k = 3/2$ NON ci sono soluzioni)

Dunque la risposta è $\boxed{k=0}$

(d) soluzione per $k=1$

scrivo il sistema per $\underline{k=1}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + z - t = 2 \\ 4x + y + 4z - 4t = 5 \\ -3y + z = -1 \end{cases}$$

risolvo il sistema con la riduzione di Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\downarrow$

2ª riga -4 (1ª riga)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5-8=-3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

terza riga $+3$ (2ª riga)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1-9 \end{array}\right) = -10$$

Quindi ho ottenuto il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + z - t = 2 \\ y = -3 \\ z = -10 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x - t = 12 \\ y = -3 \\ z = -10 \end{cases}$$

equazione parametrica:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

2) $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) il polinomio caratteristico di A si trova calcolando il determinante

$$|A - tI| = \begin{vmatrix} -t & -1 & 3 \\ 3 & -4-t & 9 \\ 1 & -1 & 2-t \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -t & -1 & 3 \\ 0 & -4-t+3 & 9-6+3t \\ 1 & -1 & 2-t \end{vmatrix} =$$

→ operazione elementare per righe: 2ª riga meno 3 (3ª riga)

$$= \begin{vmatrix} -t & -1 & 3 \\ 0 & -1-t & 3+3t \\ 1 & -1 & 2-t \end{vmatrix} = (1+t) \begin{vmatrix} -t & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2-t \end{vmatrix} =$$

2ª riga è

$(1+t)(0, -1, 3)$

uso la linearità del determinante sulle righe

$$(1+t)\left(-t\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2-t \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -t(1+t)\big((t-2)+3\big) = -t(1+t)(t+1) =$$

$$\boxed{= -t(t+1)^2}$$

(b) le radici del polinomio caratteristico sono $t_1 = 0$ e $t_2 = -1$

con molteplicità algebrica 1 e 2 rispettivamente

$$m_a(0) = 1 \qquad m_a(-1) = 2$$

vediamo la molteplicità geometrica

→ $\mu_g(0)$ non la devo calcolare: so che

$$\boxed{0 < \mu_g(0) \leq m_a(0)}$$

dunque è 1

→ $\mu_g(-1)$ è compresa tra 1 e 2:

$$\mu_g(-1) = \dim\big(\ker(A+I)\big)$$

$$A+I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\ker(A+I)$ ha dimensione $3 - rg(A+I)$ (per il teorema delle dimensioni) e si vede subito che $rg(A+I) = 1$ dunque $\mu_g(-1) = 2$

(c) $V_0 = \ker(A)$ (che so aver dimensione 1)

dunque posso prendere equazioni associate a 2 righe (ad esempio prima e terza)

$$\begin{cases} -y + 3z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3z \\ x = 3z - 2z = z \end{cases}$$

$V_0 = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$V_{-1} = \quad x - y + 3z = 0$

base $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

(d) Poiché A possiede tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$ e sono tutti regolari, A è diagonalizzabile, ovvero $\exists\, N \in GL_{\mathbb{R}}(3)$ tale che

$N^{-1}AN$ è diagonale D

questa matrice si ottiene prendendo come vettori colonna una base di autovettori per A:

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\rightsquigarrow$ con queste scelte

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Sia $\mathcal{R}(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ Rif. cart. ortonormale nello spazio

(a) retta P_0P_1 $\quad P_0\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad P_1\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

una rappresentazione parametrica per questa retta è ad esempio

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\underbrace{\begin{pmatrix}2-1\\2-0\\2-1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{P_1P_0}}, \quad t\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}} \qquad \boxed{\begin{cases} x = t+1\\ y = 2t\\ z = t+1\end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}}$$

per trovare equazioni cartesiane [Ricordiamo che una retta nello spazio 3-dimensionale è rappresentata da DUE equazioni cartesiane indipendenti, perché $1 = \dim(\text{retta}) = 3 - \#$ equaz. indip.]

"elimino il parametro"

$$\begin{cases} x = z\\ y = 2x-2\end{cases} \qquad \boxed{x - z = y - 2x + 2 = 0}$$

ecco due equazioni.

[oss ovviamente NON sono uniche!]

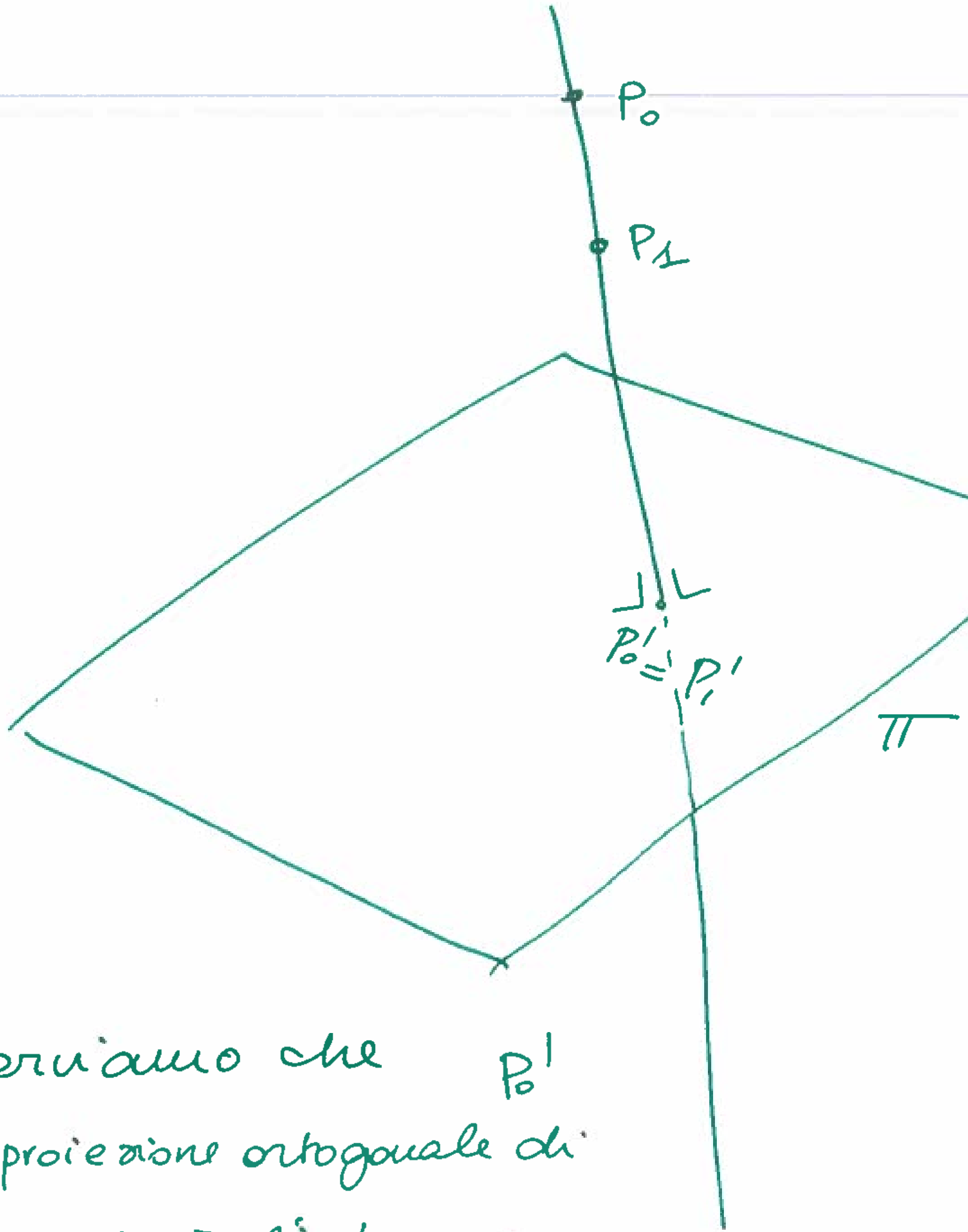
(b) So che la direzione di $r = P_0P_1$ è $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Quindi un piano perpendicolare ad r ha equazione $x + 2y + z + d = 0$

se lo voglio che passi da $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ devo porre $d=0$

$\Pi: x + 2y + z = 0$

(c)



osserviamo che P_0' la proiezione ortogonale di P_0 su π è l'intersezione di π con la retta perpendicolare a π passante per P_0

quindi devo solo fare $r \cap \pi = P_0'$

$r \cap \pi$ è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ x=z \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y=-2 \\ x=z \\ 2x=y+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-2}{6}+1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ y = \frac{-2}{3} \\ z = x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$P_0' = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

ora osserviamo che $P_1' =$ intersezione di r con π ! quindi $P_1' = P_0'$!

(d) $$d(P_0, \pi) = \frac{|1+2\cdot 0+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$