

matricola 012345

☒	0	☐	0	☐	0	☐	0	☐	0
☐	1	☒	1	☐	1	☐	1	☐	1
☐	2	☐	2	☒	2	☐	2	☐	2
☐	3	☐	3	☐	3	☒	3	☐	3
☐	4	☐	4	☐	4	☒	4	☐	4
☐	5	☐	5	☐	5	☐	5	☒	5
☐	6	☐	6	☐	6	☐	6	☐	6
☐	7	☐	7	☐	7	☐	7	☐	7
☐	8	☐	8	☐	8	☐	8	☐	8
☐	9	☐	9	☐	9	☐	9	☐	9

← Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...) pena l'esclusione. Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

...Esempio di risoluzione...

Domanda [minimabasiA] Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una lista di vettori di V . Cosa significa che questa lista è un sistema di generatori di V ? ☐ w ☐ p ☐ a ☒ c

La lista $\{v_1, \dots, v_k\}$ è un sistema di generatori per V se $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = V$.
 Ovvero: $\forall v \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$$

 (ogni $v \in V$ è combinazione lineare dei $\{v_1, \dots, v_k\}$)

Domanda [minimabasiB] Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una lista di vettori di V . Cosa significa che questa lista è linearmente indipendente? ☐ w ☐ p ☐ a ☒ c

La lista $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente se $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ v_i non appartiene allo span degli altri vettori: $v_i \notin \text{span}(\{v_1, \dots, v_k\} \setminus \{v_i\})$.
 Equivalentemente, se dati $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ se $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0_V \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.
 (l'unica combinazione lineare dei v_i che dà il vettore nullo è la combinazione nulla)

Domanda [minimabasiC] Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una lista di vettori di V . Cosa significa che questa lista è una base di V ? ☐ w ☐ p ☐ a ☒ c

Una lista $\{v_1, \dots, v_k\}$ è una base di V se
 valgono queste due condizioni:
 1) $\{v_1, \dots, v_k\}$ sono linearmente indipendenti
 2) $\{v_1, \dots, v_k\}$ generano V , cioè $\forall v \in V$
 $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ taliche $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$

Domanda [minimabasiD] Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una lista di vettori di V . Cosa significa che questa lista *non* è un sistema di generatori di V ? ☐ w ☐ p ☐ a ☒ c

La lista $\{v_1, \dots, v_k\}$ non è un sistema di
 generatori per V se non è vero che
 $\forall v \in V \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ taliche $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = v$
 cioè vale che
 $\exists v \in V$ tale che $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ vale che
 $v \neq \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$

Domanda [openstatA] Si enunci il teorema spettrale.

☐ w ☐ p ☐ a ☒ c

Sia A matrice reale simmetrica di ordine n .
 Esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$
 formata da autovettori di A .
 equivalentemente (basta una versione).
 Sia A una matrice reale simmetrica di ordine n .
 Esiste una matrice ortogonale $M \in O(n)$ tale
 che $M^T A M$ è una matrice diagonale

Domanda [openstatB] Si enunci il teorema di Rouché-Capelli.

☐ w ☐ p ☐ a ☒ c

Sia $Ax = b$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, dove $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(m, n)$ è la matrice dei coefficienti, $x \in \mathbb{R}^n$ il vettore delle incognite e $b \in \mathbb{R}^m$ il vettore dei termini noti. Il sistema è risolubile se e solo se $\text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A})$, dove $\tilde{A} = (A, b) \in \text{Mat}(m, n+1)$ è la matrice completa. Se è risolubile le soluzioni sono una varietà lineare di dimensione $n - \text{rg}(A)$.

Domanda [openstatC] Si enunci il teorema della base.

☐ w ☐ p ☐ a ☒ c

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Se B_1 e B_2 sono due basi di V , vale che $\# B_1 = \# B_2$ (cioè hanno la stessa cardinalità). Questo ci permette di definire la dimensione di V come la cardinalità di una sua base.

Domanda [openstatD] Si enunci il teorema delle dimensioni (detto anche 'formula delle dimensioni').

☐ w ☐ p ☐ a ☒ c

Sia A una matrice $\mathbb{R}^{n \times m}$. Vale che:
 $m = \text{rg}(A) + \dim(\ker A)$.
 Equivalentemente: (una delle due versioni va bene).
 Sia $L: V \rightarrow W$ una applicazione lineare fra spazi vettoriali finitamente generati. Vale che:
 $\dim(V) = \dim(\text{Im } L) + \dim(\ker L)$.

Domanda [invdiagA] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è $= A$ ☒ invertibile, ma non diagonalizzabile.☐ non invertibile e non diagonalizzabile.☐ non invertibile, ma diagonalizzabile.☐ invertibile e diagonalizzabile.

Commento sulla domanda [invdiag A]

La matrice è triangolare superiore (tutte le entrate sotto la diagonale principale sono 0)

Il suo determinante è il prodotto dei numeri sulla diagonale principale: $\det A = 2 \neq 0$

Dunque si vede subito che è invertibile.

Bisogna capire se è diagonalizzabile o no.

Gli autovalori sono 1 e 2 con molteplicità algebriche $\mu(1)=2$ $\mu(2)=1$

Dunque si come $0 < m(2) \leq \mu(2)$

$\Rightarrow$ la molteplicità geometrica di 2 è 1 (2 è regolare)

Bisogna capire se 1 è regolare:

$$m(1) = \dim \ker (A - I) = \dim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{smallmatrix} \text{teorema} \\ \text{delle} \\ \text{dimensioni} \end{smallmatrix} \right) = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq \mu(1)$$

Dunque A non è diagonalizzabile.

Domanda [invdiagB] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è

☐ invertibile, ma non diagonalizzabile.

☒ non invertibile, ma diagonalizzabile.

☐ non invertibile e non diagonalizzabile.

☐ invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [invdiagC] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è

☐ invertibile, ma non diagonalizzabile.

☐ non invertibile, ma diagonalizzabile.

☐ non invertibile e non diagonalizzabile.

☒ invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [invdiagD] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è

☐ invertibile, ma non diagonalizzabile.

☐ non invertibile, ma diagonalizzabile.

☒ non invertibile e non diagonalizzabile.

☐ invertibile e diagonalizzabile.

Domanda [morthogA] ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Domanda [morthogB] ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Domanda [morthogC] ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

☒ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

Domanda [morthogD] ♣ Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali.

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Domanda [applineareA] ♣ Sia $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e

$L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

☐ L non è suriettiva.

☐ $\text{Ker } L = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

☒ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } L$.

☒ $\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subset \text{Im } L$.

Commento sulla domanda [matogh A]

Per vedere se le matrici sono ortogonali basta controllare se:

- i vettori colonna hanno norma 1
- i vettori colonna sono a due a due ortogonali.

(cioè i vettori colonna sono una base ortonormale)

$$\square \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 1$$

dunque NON è ortogonale

(Attenzione: invece è vero che i vettori colonna sono a due a due ortogonali: se li normalizziamo la matrice ottenuta è ortogonale)

$$\blacksquare \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 vettori sono normali:

$$\bullet \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \neq 1 \quad (NO)$$

$$\blacksquare \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

(SI)

Domanda [applineareA] ♣

Sia $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e

$L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

☐ L non è suriettiva.

☒ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } L$.

☐ $\text{Ker } L = \text{Span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

☒ $\text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \text{Im } L$.

Sappiamo che L è lineare e sappiamo quanto vale su $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dunque, per la linearità di L

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \\ = L\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Dunque } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } L$$

Allo stesso modo si vede che $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$-\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } L$$

(o, volendo, si può usare che $\text{Ker } L$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$)

Oss Poiché $\text{Ker } L \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sappiamo anche che L

non è iniettiva (in questo caso non ci serve ma è bene ricordarlo).

D'altra parte sappiamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im } L$

Dunque, poiché $\text{Im } L$ è un sottospazio, $\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \text{Im } L$.

2° teorema delle dimensioni ci dice che

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim(\text{Im } L) + \dim(\ker L)$$

Sono possibili questi valori

$$(\dim \text{Im } L \geq 1$$

$$\text{e } \dim \ker L \geq 1$$

per quanto detto prima)

2	+	1
1	+	2

non
suriettive

Esempio: • L come nelle ipotesi con

$$L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ in questo caso}$$

$$\text{Im } L = \mathbb{R}^2 \text{ e } \ker L = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

• L come nelle ipotesi con $L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{allora } \ker L = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } \text{Im } L = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque entrambi questi punti

☐ L non è suriettiva.

☐ $\ker L = \text{Span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

✓ possono valere
in alcuni casi ma
in altri non valgono:
non sono dunque
necessariamente veri.

Domanda [applineareB] ♣ Sia $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che $L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

☐ $\dim \text{Ker } L = 2$.

☒ L non è iniettiva.

☐ $\text{Im } L = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

☒ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Im } L$.

Domanda [applineareC] ♣ Sia $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $L \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

☐ $\text{Im } L = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

☒ L è iniettiva.

☐ $\text{Ker } L = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

☒ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im } L$.

Domanda [applineareD] ♣ Sia $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $L \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

☒ $\text{Im } L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 0 \right\}$.

☐ L è suriettiva.

☐ $\dim \text{Ker } L = 1$.

☒ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Ker } L$.

Domanda [vspacegrassA] Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^7$; sapendo che $\dim U = \dim W = 4$, determinare la dimensione *minima* di $U \cap W$:

☐ 0

☒ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 5

Domanda [vspacegrassB] Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$; sapendo che $\dim U = 4$ e $\dim W = 3$, determinare la dimensione *minima* di $U \cap W$:

☒ 0

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

Domanda [vspacegrassC] Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$; sapendo che $\dim U = \dim W = 4$, determinare la dimensione *minima* di $U \cap W$:

☐ 0

☐ 1

☐ 2

☒ 3

☐ 5

Domanda [vspacegrassD] Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{11}$; sapendo che $\dim U = 6$ e $\dim W = 7$, determinare la dimensione *minima* di $U \cap W$:

☐ 0

☐ 1

☐ 3

☒ 2

☐ 4

Commento a [vspace gron A]

U e V sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^7$

$$\dim U = \dim V = 4$$

Le formule di Grassmann ci dice che

$$\underbrace{\dim(U+V)}_7 = \underbrace{\dim(U)}_4 + \underbrace{\dim(V)}_4 - \dim(U \cap V)$$

di questo sappiamo che

$$\text{è } \leq 7 \text{ perché ovviamente } U+V \subseteq \mathbb{R}^7$$

Dunque sappiamo da Grassmann che

$$\dim(U \cap V) = 8 - \dim(U+V) \geq 8 - 7 = 1$$

$$\text{E cioè, se } U+V = \mathbb{R}^7, \quad \dim(U \cap V) = 1$$

Ad esempio questo succede se

$$U = \text{span}(e_1, e_2, e_3, e_4) \quad V = \text{span}(e_4, e_5, e_6, e_7)$$

Dove $\{e_1, \dots, e_7\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^7$.

Dunque la minima possibile dimensione dello spazio intersezione $U \cap V$ è 1.

Domanda [roucheA] Sia $AX = B$ un sistema lineare con A di ordine 4×3 . Stabilire quale delle seguenti affermazioni è **necessariamente** vera.

- ☐ Se $B = \mathbf{0}_4$, allora $X = \mathbf{0}_3$ è unica soluzione per ogni A .
☐ Se $\text{rg } A$ è massimo, allora la soluzione esiste ed è unica per ogni B .
☒ Se $\text{rg}(A|B) = 4$, allora il sistema non è risolubile.
☐ Se $B \in \text{Span}(A^1|A^2|A^3)$, allora la soluzione esiste ed è unica.

Domanda [roucheB] Sia $AX = B$ un sistema lineare con A di ordine 3×4 . Stabilire quale delle seguenti affermazioni è **necessariamente** vera.

- ☐ Se $B = \mathbf{0}_3$, allora $X = \mathbf{0}_4$ è unica soluzione per ogni A .
☐ Se $\text{rg } A$ è massimo, allora la soluzione esiste ed è unica per ogni B .
☒ Se $\text{rg } A = 3$, allora il sistema è risolubile.
☐ Se $B \in \text{Span}(A^1|A^2|A^3|A^4)$, allora la soluzione esiste ed è unica.

Domanda [roucheC] Sia $AX = B$ un sistema lineare con A di ordine 3×3 . Stabilire quale delle seguenti affermazioni è **necessariamente** vera.

- ☐ Se $B = \mathbf{0}_3$, allora $X = \mathbf{0}_3$ è unica soluzione per ogni A .
☒ Se $\text{rg } A$ è massimo, allora la soluzione esiste ed è unica per ogni B .
☐ Se $\text{rg}(A|B) = 3$, allora il sistema è risolubile.
☐ Se $B \in \text{Span}(A^1|A^2|A^3)$, allora la soluzione esiste ed è unica.

Domanda [roucheD] Sia $AX = B$ un sistema lineare con A di ordine 3×3 . Stabilire quale delle seguenti affermazioni è **necessariamente** vera.

- ☐ Se $B = \mathbf{0}_3$, allora $X = \mathbf{0}_3$ è unica soluzione per ogni A .
☐ Per ogni B , se $\text{rg}(A|B)$ è massimo, allora la soluzione esiste ed è unica.
☐ Se $\text{rg}(A) = 3$, allora il sistema ammette due soluzioni distinte.
☒ Se $B \in \text{Span}(A^1|A^2|A^3)$, allora esiste una soluzione.

Domanda [matrixA] ♣ Sia A una matrice quadrata 3×3 ; sapendo che $\det A = -2$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

- ☒ $\det A^T = -2$. ☒ $\det A^3 = -8$. ☐ $\det 2A = -4$. ☐ $\det A^{-1} = \frac{1}{2}$.

Domanda [matrixB] ♣ Sia A una matrice quadrata 3×3 ; sapendo che $\det A = -3$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

- ☐ $\det A^T = 3$. ☐ $\det A^3 = -9$. ☒ $\det 2A = -24$. ☐ $\det A^{-1} = \frac{1}{3}$.

Domanda [matrixC] ♣ Sia A una matrice quadrata 2×2 ; sapendo che $\det A = -3$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

- ☒ $\det A^T = -3$. ☒ $\det(-A) = -3$. ☐ $\det 2A = -6$. ☒ $\det A^{-1} = -\frac{1}{3}$.

Domanda [matrixD] ♣ Sia A una matrice quadrata 2×2 ; sapendo che $\det A = -2$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

- ☐ $\det A^T = -\frac{1}{2}$. ☐ $\det(-A) = 2$. ☒ $\det 2A = -8$. ☒ $\det A^{-1} = -\frac{1}{2}$.

Commenti sulla domanda [rouche A]

Siccome non c'è il trifoglio, basta cercare la risposta vera.

Discutiamo comunque per esercizio le 4 affermazioni.

$$A \underline{x} = \underline{b} \quad A \text{ matrice } 4 \times 3$$

□ Se $B = \mathbf{0}_4$, allora $X = \mathbf{0}_3$ è unica soluzione per ogni A .

Se $\underline{b} = \underline{0} \in \mathbb{R}^4$ il sistema è omogeneo. In questo caso $\underline{0}_3$ è soluzione per il sistema, ma non è detto che sia unica. Sappiamo infatti che la soluzione in questo caso è unica se e solo se $\text{rg } A = \# \text{variabili} = 3$

Se $\text{rg } A < 3$ non è unica. Ad esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□ Se $\text{rg } A$ è massimo, allora la soluzione esiste ed è unica per ogni B .

Sappiamo da Rouché - Capelli che la soluzione esiste ed è unica se e solo se $\text{rg}(A) = \text{rg}(\hat{A}) = \# \text{variabili} = 3$

A è 4×3 dunque il suo rango massimo è 3.

Ma $\hat{A}$ è 4×4 e può avere rango 4.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg } \hat{A} = 4$
in questo caso il sistema non è risolubile.

■ Se $\text{rg}(A|B) = 4$, allora il sistema non è risolubile.

Questa affermazione è vera: infatti, come osservato nel punto precedente, $\text{rg } A \leq 3$ e se $\text{rg}(\hat{A}) = 4$ il teorema di Rouché - Capelli ci dice che il sistema non è risolubile.

□ Se $B \in \text{Span}(A^1 | A^2 | A^3)$, allora la soluzione esiste ed è unica.

Ricordiamoci che $\underline{B} \in \text{span}(A^1 | A^2 | A^3)$ è equivalente a dire che $\exists \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tale che $x_1 A^1 + x_2 A^2 + x_3 A^3 = \underline{B}$
cioè $A \cdot \underline{x} = \underline{B}$

Quindi l'affermazione equivale a dire che esiste una soluzione. Ma non è necessariamente vero che sia unica!

Per esempio se $\text{rg}(A) (= \text{rg}(\tilde{A})) < 3$ (ad esempio 2) esiste una soluzione ma non unica: le soluzioni hanno dimensione $n-2=2$.