Geometria I- Diario delle lezioni

L. Stoppino,Università di Pavia, a.a. 2018/2019

Nelle prossime pagine, adottiamo le seguenti convenzioni per le referenze:
[Kos] si riferisce a C. Kosniowski, Introduzione alla topologia algebrica, Zanichelli, Bologna 1988.
[Man] si riferisce a M. Manetti, Topologia, seconda edizione, Springer, Milano 2014.
[Mun] si riferisce a J. Munkres, Topology, Second edition, Pearson, 2000.
[Ser1] si riferisce a E. Sernesi, Geometria 1, seconda edizione, Bollati Boringhieri, Torino 2001.
[Ser2] si riferisce a E. Sernesi, Geometria 2, seconda edizione, Bollati Boringhieri, Torino 2001.

Lunedì 4 marzo (14-16, 2 ore).

Introduzione del corso.

Insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un dato insieme X; cardinalità di un insieme, verifica che non esistono applicazioni suriettive tra X insieme qualsiasi e $\mathcal{P}(X)$. Teo: Gli insiemi $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $2^{\mathbb{N}}$ e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ hanno la stessa cardinalità. Ref: [Man] Cap. 2.

Spazi metrici: Definizione ed esempi (metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$, metrica discreta su un insieme qualsiasi). Ref: [Ser2] Cap. 1.

Martedì 5 marzo (14-16, 2 ore).

Bolle negli spazi metrici. Esempi (con topologia euclidea, discreta, e con le topologie d' e d'' definite negli esercizi). Aperti negli spazi metrici.

Prop: le bolle sono aperte.

Prop: Gli aperti rispetto a una metrica sono tutte e sole le unioni di bolle.

Proprietà degli aperti: la famiglia $\mathcal{F}$ degli aperti per una metrica su X soddisfa le proprietà: che $\emptyset$ e X sono aperti, $\mathcal{F}$ è chiusa per unioni arbitrarie ed è chiusa per intersezioni finite.

Continuità di funzioni tra spazi metrici in un punto. Continuità.

Teorema: una funzione $f\colon X \to Y$ tra due spazi metrici è continua se e solo se la controimmagine di aperti in Y è aperta in X.

Prop (lasciata per esercizio): una funzione $f\colon X \to Y$ tra due spazi metrici è continua in $x_0 \in X$ se e solo se la controimmagine di intorni di $f(x_0)$ è un intorno di x_0.

Ref: [Ser2] Cap. 1.

Giovedì 7 marzo (14-16, 2 ore).

Equivalenza tra metriche: due metriche d, d' su un insieme X si dicono equivalenti se esistono α, β tali che per ogni $x, y \in X$ valgono le disuguaglianze:

$$\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y).$$

Equivalenza topologica: due metriche d, d' su un insieme X si dicono topologicamente equivalenti se inducono la stessa topologia.

Verifica che equivalenti $\Rightarrow$ topologicamente equivalenti ma che il viceversa non vale. (Ref. Manetti 3.1 e 3.4). Esempio con la Limitazione standard della metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$.

Definizione di spazio topologico.

Primi esempi: topologia euclidea su $\mathbb{R}$; topologia discreta e topologia concreta

Topologia indotta da una metrica: spazi metrizzabili.

Possibili topologie su insiemi con cardinalità 1, 2 e 3.

Ref: [Ser2] Cap. 1, Sez 1-2.

Lunedì 11 marzo (14-16, 2 ore).

Esercizio: L'unica topologia metrizzabile su uno spazio finito è quella discreta.

Altri esempi: 1) topologia della semicontinuità superiore e inferiore su $\mathbb{R}$. 2) Topologia cofinita. Verifica che la cofinita è una topologia.

Esercizi dal foglio 1.

Martedì 12 marzo (14-16, 2 ore).

Chiusi di uno spazio topologico. Proprietà.

Topologie confrontabili, più o meno fini.

L'intersezione di topologie è una topologia: topologia generata da una famiglia di sottoinsiemi. (ref. Manetti 3.1).

Esempi.

Definizione di *base* di una topologia.

Base di una topologia. Esempi (bolle aperte per uno spazio metrico, i singoletti sono una base per la topologia discreta, esempi su uno spazio con tre elementi).

Teorema della base (quando una famiglia di aperti puo' essere base di una topologia: Teorema 3.7 del Manetti).

Ref: [Ser2] Cap. 1. Sez 2.

Giovedì 14 marzo (14-16, 2 ore).

Esempio importante: retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ ([Man] Esempio 3.9, [Ser2] Esempi 2.4- 1).

Esercizio: 1) Verifica che la topologia $\mathcal{T}_S$ è strettamente più fine di quella euclidea $\mathcal{T}_e$ e strettamente meno fine di quella discreta $\mathcal{D}$. 2) Verifica che $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ è aperto per $\mathcal{T}_S$ se e solo se $\forall x \in \mathcal{U}$ esiste $\epsilon > 0$ tale che $[x, x+\epsilon) \subseteq \mathcal{U}$.

Definizioni di intorni. Oss: Un sottoinsieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.

Oss: La famiglia degli intorni di un punto x è chiusa per estensione ed intersezione finita

Def. di base locale/sistema fondamentale di intorni di $x \in X$.

Es: 1) le bolle centrate in un punto x sono un sistema fondamentale di intorni di x; 2) data una base $\mathcal{B}$, per ogni $x \in X$ l'insieme $\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x.

Assiomi di numerabilità:

Def. spazio topologico secondo-numerabile o a base numerabile.

Esempi: uno spazio discreto $(X, \mathcal{D})$ è 2-numerabile se e solo se X è di cardinalità numerabile.

Def. spazio topologico primo-numerabile.

Esempi: gli spazi discreti sono 1-numerabili. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ è 1-numerabile ma non 2-numerabile ([Ser2] Esempi 2.4-6).

Prop: 2-numerabile $\Rightarrow$ 1-numerabile.

Prop: metrizzabile $\Rightarrow$ 1-numerabile.

Ref: [Ser2] Cap. 1. Sez 2.

Lunedì 18 marzo (14-16, 2 ore).

Successioni in spazi topologici. Definizione di limite. Definizione di sottosuccessione.

Oss: Il limite non è necessariamente unico.

Esempi estremi: limiti in spazi discreti e limiti in spazi concreti.

Oss: In uno spazio metrico il limite di una successione se esiste è unico.

Definizione di spazio di Hausdorff o T2.

ES: in uno spazio T2 i limiti sono unici.

Prop: Metrizzabile $\Rightarrow T2$.

Definizione di spazio $T1$ e $T0$.

Oss: $T2 \Rightarrow T1 \Rightarrow T0$.

Controesempi che mostrano che non valgono le implicazini inverse.

Prop: uno spazio topologico X è $T1$ se e solo se i punti sono chiusi.

Definizione di spazi $T3$ e $T4$. Controesempio ch emostra che in generale $T3 \not\Rightarrow T2, T1, T0$ e $T4 \not\Rightarrow T2, T1, T0$.

Classificazione dei punti rispetto a un sottoinsieme: interno esterno e di frontiera: verifica che Int Est e Fr formano una partizione di X.

Prime proprietà:
1) Int(S) è l'unione degli aperti contenuti in S;
2) $Int(S) = S$ se e solo se S è aperto;
3) S è aperto se e solo se $S \cap Fr(S) = \emptyset$.

Oss: x appartiene alla parte interna di S se e solo se S è un intorno di x

Ref: [Ser2] Cap. 1. Sez 2 e 3, per le proprietà di separazione: [Ser2] Cap 3 sez 8, [Kos] Cap 8.

Martedì 19 marzo (14-16, 2 ore).

Prop: $S \subseteq X$ è chiuso se e solo se, equivalentemente:
i) $Fr(S) \subseteq S$;
ii) $S = Int(S) \cup Fr(S)$.

Chiusura di un insieme: $\overline{S} := Int(S) \cup Fr(S) = S \cup Fr(S)$.

Prop: la chiusura di un insieme è l'intersezione di tutti i chiusi che lo contengono.

Esempi. (Ref. anche [Man] 3.1 e 3.2).

Punti di accumulazione: $x \in X$ è un punto di accumulazione per S se ogni intorno di x contiene almeno un punto di S diverso da x. Derivato $D(S)$: insieme dei punti di accumulazione.

Prop: $\overline{S} = D(S) \cup S$.

Proposizione: sia B un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Allora:
1) un punto $x \in X$ è aderente a B (cioè appartiene a $\overline{B}$) se e solo se per ogni intorno $U \in I(x)$ vale $U \cap B \neq \emptyset$.
2) un punto $x \in X$ è aderente a B se esiste una successione di elementi in B che converge a x. Se X è primo numerabile allora vale anche il viceversa.

Definizioni ed esempi di sottospazi densi. Esempi importanti: densità di $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$. Densità in spazi discreti e in spazi concreti.

Def. Spazio topologico separabile.

Esempi.

Lemma: secondo numerabile $\Rightarrow$ separabile.

Lemma: metrizzabile + separabile $\Rightarrow$ secondo-numerabile.

Oss: dunque $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ è 2-numerabile.

Ref: [Ser2] Cap. 1. Sez 3.

Giovedì 21 marzo (14-16, 2 ore).

Definizione di continuità ed esempi. Discussione sulla continuità dell'applicazione identica.

Lemma: $f\colon X \to Y$ continua se e solo se per ogni $S \subseteq X$ $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$. (dim. per esercizio)

Teo: composizione di applicazioni continue è una applicazione continua.

Definizione di continuità in un punto.

Teo: f è continua se e solo se è continua in ogni punto.

Def: applicazioni aperte e chiuse.

Lemma: data $f\colon X \to Y$ biiettiva sono equivalenti:

- f è aperta;
- f è chiusa.
- L'inversa $g = f^{-1}\colon Y \to X$ è continua.

Definizione di omeomorfismo. Definizione di spazi omeomorfi. Essere omeomorfi è una relazione di equivalenza.

Esercizi:

Verifica che $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non è 2-numerabile. Dunque $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non è metrizzabile (essendo separabile).

Esempio di spazio topologico non 1-numerabile: Uno spazio non numerabile con la topologia cofinita.

Altro esempio: la topologia conumerabile su uno spazio non numerabile.

Esempio: in uno spazio non numerabile X con la topologia conumerabile se prendo $x \in X$, e considero $S := X \setminus \{x\}$ vale che $\overline{S} = X$ ma non esiste una successione a valori in S che tenda ad x.

Ref (per la parte di teoria): [Ser2] Cap. 1. Sez 4.

Lunedì 25 marzo (14-16, 2 ore).

Topologia di sottospazio. Esempio: il caso degli spazi metrici.

Definizione di sottospazio topologico.

Prop: se $A \subseteq Y$ e $Y \subseteq (X, \mathcal{T})$ allora la chiusura di A in Y (che denotiamo $\overline{A}^Y$) coincide con l'intersezione della chiusura di A con Y.

Prop: siano $E \subseteq Y \subseteq X$. Allora

1. Se Y è aperto in X allora $E \subseteq Y$ è aperto in Y se e solo se E è aperto in X;
2. Se Y è chiuso in X allora $E \subseteq Y$ è chiuso in Y se e solo se E è chiuso in X;
3. Se Y è intorno di y in X allora E è intorno di y in Y se e solo se è intorno di y in X.

Esempio: sottospazi di $\mathbb{R}$.

Sottospazi discreti. (ref. [Ser2] Cap. 2. Sez 5, Esercizio 8) Esercizi sui sottospazi discreti.

Data un'applicazione da un insieme X a uno spazio topologico $(Y, \mathcal{S})$, definizione della topologia generata $f^{-1}\mathcal{S}$ su X.

(Più in generale, definizione della topologia indotta su un insieme X da una famiglia di applicazioni $f_\alpha \colon X \longrightarrow Y_\alpha$, con Y_α spazio topologico.)

Teorema: sia $\varphi \colon (Z, \mathcal{T}) \to (X, f^{-1}\mathcal{S})$. Allora φ è continua se e solo se $f \circ \varphi$ è continua.

Definizione di immersione (notazione del [Ser2]: inclusione continua). Esempi, esempi di applicazioni iniettive e continue che non sono immersioni.

Lemma: Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione continua.

- Se f è iniettiva e aperta, è un'immersione aperta.
- Se f è iniettiva e chiusa è un'immersione chiusa.

Esempi importanti: $I^n \subset \mathbb{R}^n$ ipercubo, $D^n \subset \mathbb{R}^n$ sdisco (e la sua chiusura $\overline{D^n}$), $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sfera n-dimensionale.

Ref: [Ser2] Cap. 2. Sez 5.

Martedì 26 marzo (14-16- 2 ore)

Proiezione da un punto su un piano che non lo contiene. Definizione generale e calcolo in corrdinate.

Proiezione stereografica: definizione, calcolo esplicito in coordinate e calcolo esplicito della applicazione inversa.

Dunque per ogni $P \in S^n$ esiste un omeomorfismo tra $S^n \setminus \{P\}$ ed $\mathbb{R}^n$. Ref: [Ser2] Cap. 2. Sez 5 (Esempio 15).

Definizione di omeomorfismo locale. Verifica che un omeomorfismo locale è sempre un'applicazione aperta.

Esercizio importante: se $f \colon X \to Y$ è un'applicazione tra spazi topologici. Se esiste $\mathcal{B}$ una base di X tale che per ogni $B \in \mathcal{B}$ $f(B)$ è aperto, allora f è aperta.

Esempi. Esempio importante di omeomorfismo locale: mappa esponenziale $\mathbb{R} \to S^1$.

Dimostrazione del Lemma: $f \colon X \to Y$ continua se e solo se per ogni $S \subseteq X$ $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$.

Giovedì 28 marzo (14-16- 2 ore)

Definizione di ricoprimento di un insieme. Ricoprimento aperto e chiuso di uno spazio topologico.

Proposizione: incollamenti di funzioni continue compatibili su ricoprimenti aperti e su ricoprimenti chiusi finiti sono funzioni continue.

Metrica prodotto sui prodotti di spazi metrici.

Definizione di topologia prodotto. Base canonica per la topologia prodotto.

Prop: la topologia prodotto è la meno fine delle topologie su $X \times Y$ che rendono continue le due proiezioni.

Verifica che la topologia indotta dalla metrica prodotto è la topologia prodotto delle due topologie indotte sui fattori dalle due metriche di partenza.

Teo: le proiezioni sono aperte (ma non sempre chiuse: controesempio); un'applicazione in uno spazio prodotto è continua se e solo se lo sono le sue componenti; le fibre sono omeomorfe alle componenti.

Prop: il prodotto di sottospazi è il sottospazio del prodotto.

Es: il prodotto di elementi di base è una base per la topologia prodotto. In particolare la topologia prodotto su $\mathbb{R}^n$ indotta dalla topologia euclidea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ è la topologia euclidea.

Ref: [Ser2] Cap. 2. Sez 6.

Lunedì 1 aprile (14-16, 2 ore)

Prop: sottospazi di T2 sono T2; il prodotto di spazi T2 è T2.

Teo: X è T2 se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto.

Oss: essere $T2$ (in generale essrere Ti) è una proprietà topologica.

Prop: siano $f, g \colon X \to Y$ funzioni continue da uno spazio topologico a uno spazio T2. Allora $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è un chiuso di X.

Prop: sia $f \colon X \to Y$ funzione continua da uno spazio topologico a uno spazio T2. Allora il grafico di f è chiuso.

Definizione di spazio prodotto di famiglie arbitrarie di spazi.

Esempio: la topologia prodotto su $\mathbb{R}^{(0,1)}$ è la topologia della convergenza puntuale da $(0, 1)$ ad $\mathbb{R}$.

Ref: [Ser2] Cap. 2. Sez 6 e Sez. 8.

Martedì 2 aprile (14-16, 2 ore)

Esempi importanti di spazi prodotto: il Toro, il cilindro, figure di rotazione.

Esercizio illuminante: Verifica che in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ il sottospazio $R = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\}$ è discreto, mentre il sottospazio $T = \{(x, x) \in \mathbb{R}\}$ è omeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$.

Esempio di uno spazio che è T4 ma non T3, nè T2, nè T1, nè T0.

Esercizio: Uno spazio topologico X è T0 se e solo se punti distinti hanno chiusure distinte.

Esercizio 3.59 del Manetti: Dimostrare che uno spazio topologico è di Hausdorff se e solo se per ogni suo punto x vale

$$\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{I}(x)} \overline{N}.$$

Esercizi su basi e sistemi fondamentali di intorni (da Esercizi 1)

Esercizi su parte interna e chiusura (da Esercizi 2).

Esercizi su continuità.

Verifica che tutte le proprietà di spazi topologici introdotte sono proprietà topologiche (cioè invarianti per omeomorfismo).

<u>Giovedì 4 aprile (11-13- 2 ore)</u>

Spazi regolari, spazi normali.

Prop: regolare $\Rightarrow T2$
normale $\Rightarrow$ regolare.

Prop: uno spazio metrizzabile è normale (dim: [Man] Prop. 7.31).

Prop: regolare e 2-numerabile $\Rightarrow$ normale.

Prop: se uno spazio topologico X separabile contiene un sottoinsieme chiuso discreto non numerabile, allora X non è normale.

Esempio: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ è normale, ma $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non lo è.

Lemma di Urysohn (con idea della dimostrazione).

Teorema di metrizzabilità di Urisohn: normale + 2-numerabile $\Rightarrow$ metrizzabile. (senza dimostrazione. Una dimostrazione molto chiara si può trovare su [Mun], Cap. 4 Sez. 34)

Ref: [Ser2] Cap. 2. Sez 8.

<u>Lunedì 8 aprile (14-16, 2 ore)</u>

Unione disgiunta di spazi topologici.

Spazi quoziente.

Definizione di topologia indotta $\mathcal{T}_f$ da una mappa $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to Y$ e prime proprietà (in particolare verifica che è la più fine topologia che rende continua f).

Esercizio: Sia Y lo spazio quoziente di uno spazio X relativo ad una suriezione $f\colon X \to Y$. Vale che $C \subseteq Y$ è chiuso se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X.

Definizione di sottoinsiemi saturi. Verifica che un sottoinsieme $B \subset Y$ è aperto se e solo se è immagine di un aperto saturo A di X.

Osservazione: non è vero in generale che f è aperta nè chuisa.

Esempio importante: $e\colon [0,1] \to S^1$ definita da $e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ è un'identificazione chiusa ma non aperta.

Teorema: (proprietà universale dello spazio quoziente): Siano X, Z spazi topologici, Y un insieme. Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Z \to Y$ applicazioni con f suriettiva e g continua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, "\exists h?"] \\ Z & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Allora esiste $h\colon (Y, \mathcal{T}_f) \to Z$ continua tale che $g = h \circ f$ se e solo se g è costante sulle fibre di f. Inoltre, h è aperta (risp. chiusa) se g è aperta (risp. chiusa).

Osservazione importante: ogni relazione di equivalenza $\sim$ su un insieme X corrisponde ad un'opportuna applicazione suriettiva da X e viceversa. Data una relazione di equivalenza su uno spazio topologico chiamiamo spazio quoziente $X/\sim$ l'insieme delle classi di equivalenza con la topologia quoziente indotta dall proiezione al quoziente $\pi\colon X \to X/\sim$ $\pi(x) = [x]$.

Cor (della proprietà universale della topologia quoziente): se $\sim$ è una relazione di equivalenza sullo spazio topologico X e $\pi\colon X \to X/\sim$ è la proiezione sul quoziente, data $g\colon Z \to X/\sim$ applicazione continua da uno spazio topologico Z. Allora esiste $\tilde{g}\colon X/\sim \to Z$ continua tale che $g = h \circ \pi$ se e solo se g è costante sulle classi di equivalenza di $\sim$. Inoltre $\tilde{g}$ è aperta (risp. chiusa) se g lo è.

Se $S \subseteq X$, consideriamo la relazione di equivalenza: $x \sim x'$ sse $x = x'$ oppure $x, x' \in S$. Lo spazio quoziente $X/\sim = X/S$ si chiama contrazione di S ad un punto. Esempi di contrazioni ad un punto.

Ref: [Ser2] Cap. 2. Sez 7.

<u>Martedì 9 aprile (14-16, 2 ore)</u>

Esercizio importante: la contrazione a un punto $[0,1]/\{0,1\} \sim S^1$.

Esercizio: se $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Z$ sono due identificazioni con le stesse fibre, allora $Y \sim Z$.

Esempi importanti: cilindro, nastro di Möbius, spazio proiettivo reale come quozienti di figure piane con lati identificati.

Definizione generale di spazio proiettivo reale e complesso.

Esercizio: un quoziente topologico $f\colon X \to Y$ è T1 se e solo se per ogni $p \in Y$ la fibra su p $f^{-1}(p)$ è chiusa in X.

Esercizio sulla topologia quoziente: la lingua biforcuta (Manetti esercizio 5.7).

Esercizio: la restrizione della mappa esponenziale $[0,1] \to S^1$ è un'identificazione chiusa. La restrizione a $[0,1) \to S^1$ non lo è.

Definizione di varietà topologica di dimensione n. ref: [Ser2] Cap. 3 Sez. 8 Esempio 8.11.6.

Verifica che se X e Y sono due varietà topologiche di dimensione n ed m rispettivamente allora $X \times Y$ è una varietà topologica di dimensione topologica $n + m$.

<u>Giovedì 11 aprile (14-16- 2 ore)</u>

Esempio di quoziente di $\mathbb{R}$ che non è primo numerabile (Es. 6.1 Manetti).

Toro e bottiglia di Klein come figure piane con i bordi identificati.

Definizione di compattezza.

Esempi: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ non è compatto; uno spazio concreto è sempre compatto; uno spazio di cardinalità finita è sempre compatto; uno spazio discreto è compatto se e solo se è finito.

Teo: dato uno spazio topologico X e una sua base. Sono equivalenti: X è compatto e ogni ricoprimento di X composto di elementi della base possiede un sottoricoprimento finito.

Teo: $[0,1] \subset \mathbb{R}$ è compatto con la topologia euclidea.

Teo: (i) Chiuso in un compatto è compatto. (ii) Compatto in un T2 è chiuso. (iii) Unione finita di compatti è compatto.

Ref: [Ser2] Cap. 2. Sez 7. e Cap. 3. Sez. 9.

Lunedì 15 aprile (14-16, 2 ore)

Cor: Compatto in $\mathbb{R}$ se e solo se chiuso e limitato.

Esercizio: Definizione di proprietà dell'intersezione finita (Manetti esercizio 4.25).

Prop: uno spazio topologico è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

Teo: immagine tramite continua di compatti è compatta.

Cor: la compattezza è una proprietà topologica.

Prop: Un'applicazione continua da un compatto a uno spazio di Hausdorff è chiusa. Dunque in particolare un'applicazione continua e suriettiva da un compatto a un T2 è un'identificazione chiusa.

Teorema di Tychonoff: Il prodotto di una famiglia qualsiasi di spazi topologici compatti è compatto. (dimostrazione solo nel caso di una famiglia finita)

Per la dimostrazione abbiamo usato il Lemma del Tubo: Siano X, Y spazi topologici con X compatto. Sia $\overline{y} \in Y$. Sia $\mathcal{W}$ un aperto di $X \times Y$ che contiene la fibra $q^{-1}(\overline{y}) = X \times \{\overline{y}\}$. Allora esiste un aperto $\mathcal{V}$ tale che $\overline{y} \in \mathcal{V}$ e $X \times \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$.

La referenza dove questo Lemma è esplicitamente scritto è [Mun], Cap. 3, Sez. 5.

Cor: (Heine-Borel)Un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Prop: (a) in uno spazio topologico compatto ogni sottoinsieme infinito possiede almeno un punto di accumulazione. (b) In uno spazio topologico X compatto $T1$ e 1-numerabile, ogni successione possiede sottosuccessioni convergenti.

Ref: [Ser2] Cap. 3. Sez. 9.

Martedì 16 aprile (14-16, 2 ore)

Esercitazioni (Torelli): esercizi sulla compattezza.

Lunedì 29 aprile (14-16, 2 ore)

Def. di compatto per successioni.

Prop: X secondo-numerabile. Sono equivalenti: (1) X compatto; (2) X compatto per successioni.

Def. e prima proprietà di successioni di Cauchy in spazi metrici.

Prop: una successione convergene è di Cauchy.

Def. spazio metrico completo.

Def. di spazio totalmente limitato.

Esempio di spazio limitato ma non totalmente limitato: $\mathbb{R}$ con la metrica discreta.

Ref: [Ser2] Cap. 3. Sez. 10.

Martedì 30 aprile (11-13, 2 ore)

Prop: Un sottospazio di uno spazio completo è completo se e solo se è chiuso.

Prop: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ con la metrica euclidea sono completi.

Esempio: In $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea un sottospazio è limitato se e solo se è totalmente limitato.

Estensione di Heine - Borel agli spazi metrici:

Teo: X spazio metrico. Sono equivalenti: (1) X compatto (2) X completo e totalmente limitato.

Completamento di uno spazio metrico: definizione, unicità e proporietà universale.

Esempio: i reali come completamento dei razionali.

Ref: [Ser2] Cap. 3. Sez. 10, [Man]. Per la costruzione di Cauchy dei reali si veda

<u>Giovedì 2 maggio (9-11- 2 ore)</u>

Connessione: definizione e proprietà equivalenti. Primi esempi. Sottospazi connessi.

Lemma: X spazio topologico $A \subseteq X$ aperto e chiuso. $Y \subseteq X$ connesso. Allora $Y \subseteq A$ oppure $Y \subseteq X \setminus A$.

Lemma: sia X uno spazio topologico $Y \subseteq X$ un connesso e sia W tale che $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$. Allora Y è connesso.

Lemma: l'unione di una famiglia di connessi che contengono un punto è connessa.

Teo: immagine tramite continua di connessi è connesso.

Verifica che la connessione è una proprietà topologica.

Teo: Gli intervalli in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea sono connessi.

Esempio importante: i convessi in $\mathbb{R}^n$ sono connessi.

Definizione di arco tra due punti di uno spazio topologico. Definizione di connessione per archi.

Teo: uno spazio connesso per archi è connesso.

Esempio di uno spazio connesso non connesso per archi: la pulce e il pettine (ref: [Kos], cap 12).

Ref: [Ser2] Cap. 3. Sez. 11 e 12.

<u>Lunedì 6 maggio (14-16, 2 ore)</u>

Esercitazioni (Torelli): esercizi dal foglio 4 e dal foglio 5.

<u>Martedì 7 maggio (11-13, 2 ore)</u>

Oss: la connessione e la Connessione per archi sono proprietà topologiche.

Intervalli di $\mathbb{R}$. Teo: dato $I \subset \mathbb{R}$ sono equivalenti: 1) I è un intervallo 2) I è convesso; 3) I è connesso 4) I è connesso per archi.

Esempio: $[a, b]$, $[a, b)$ e $(a, b]$ sono tutti non omeomorfi tra loro.

Teo: prodotto di spazi connessi è connesso. Prodotto di spazi cpa è cpa (dimostrato per prodotti finiti. Sul [Ser2] trovate i prodotti arbitrari).

Definizione di componente connessa.

Teo: per ogni punto di uno spazio topologico esiste un'unica componente connessa che lo contiene. Le componenti connesse inoltre sono chiuse.

Esempio: Le componenti connesse di $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sono i punti (e non sono aperti).

Lemma: le componenti connesse sono aperte se e solo se ogni punto contiene un aperto connesso.

Def: connessione e connessione per archi locale ([Ser2] esercizio 10 cap 3 sez. 11).

Definizione di concatenazione di cammini.

Definizione di componenti connesse per archi.

Esempio: componenti connesse e connesse per archi della pulce e il pettine. (dunque le componenti connesse per archi non sono necessariamente chiuse, a differenza di quelle connesse).

Ref: [Ser2] Cap. 3. Sez. 11 e 12.

<u>Giovedì 9 maggio (9-11, 2 ore)</u>

Teo: Uno spazio topologico X connesso e localmente cpa è cpa.

Cor: un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

Esercizio importante: il numero di componenti connesse di uno spazio topologico è un invariante topologico.

Esercizio importante: Sono equivalenti: (1) X connesso; (2) non esiste un'applicazione continua suriettiva da X in $\{0, 1\}$ con la topologia discreta; (3) per ogni coppia di punti $p, q \in X$ e per ogni ricoprimento aperto $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$, esiste una sottofamiglia finita $\{\mathcal{U}_{\alpha_1}, \mathcal{U}_{\alpha_2}, \dots, \mathcal{U}_{\alpha_k}\}$ tale che $p \in \mathcal{U}_{\alpha_1}$, $q \in \mathcal{U}_{\alpha_k}$ e per ogni $i < k$ vale che $\mathcal{U}_{\alpha_i} \cap \mathcal{U}_{\alpha_{i+1}} \neq \emptyset$.

Esercizio: definizione di sottoinsieme convesso e stellato di $\mathbb{R}^n$. Verifica che sono connessi.

Esercizi dal foglio 5.

Teo: sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici con Y connesso e $f^{-1}(y)$ connesso per ogni $y \in Y$. Se f è aperto o chiusa allora X è connesso.

Cor: prodotto di spazi connessi è connesso.

Esercizio: totale sconnessione.

Es (Sernesi 3.11.8): Uno spazio metrizzabile numerabile con almeno due punti è totalmente sconnesso.

<u>Lunedì 13 maggio (14-16, 2 ore)</u>

Richiami su spazi affini. Definizione ed esempi.

Sottospazi.

Intersezione di sottospazi.

Segmenti e insiemi convessi. Inviluppo convesso.

Indipendenza affine di punti.

Sistemi di riferimento affine.

Trasformazioni affini e affinità.

Ref: [Ser1] Cap. 1. Sez. 7, 8 e 14.

<u>Martedì 14 maggio (11-13, 2 ore)</u>

Parallelismo in geometria affine.

Richiami su geometria affine in dimensione 2 e 3.

Teorema di Talete, Pappo e Desargues.

Ref: [Ser1] Cap. 1. Sez. 9,10 e 14.

Giovedì 16 maggio (9-11, 2 ore)

Esempi importanti: traslazioni, affinità che fissano un punto $Aff(\mathbb{A})_O$, omotetie, simmetria rispetto a un centro.

Struttura del gruppo affine.

Affinità in coordinate.

Proprietà affini.

Affinità e indipendenza lineare.

Teo: Due sottospazi affini sono affinemente equivalenti se e solo se hanno la stessa dimensione.

Ref: [Ser1] Cap. 1. Sez. 14.

Lunedì 20 maggio (14-16, 2 ore)

Esercizi su affinità (Torelli).

Martedì 21 maggio (11-13, 2 ore)

Definizione di spazi euclidei.

Distanza indotta da un prodotto scalare. Esempio: la metrica discreta su $\mathbb{R}^n$ non è indotta da un prodotto scalare.

Richiami sui prodotti scalari e gli operatori unitari.

Sistemi di coordnate cartesiani.

Isometrie. Gruppo ortogonale. Isometrie in coordinate.

Ortognoalità angoli.

Isometrie in dimensione 2.

Riflessione rispetto ad un iperpiano.

Ref: [Ser1] Cap. 2. Sez. 19, 20, 21.

Giovedì 23 maggio (9-11, 2 ore)

Teo: ogni isometria di uno spazio euclideo n-dimensionale è composizione di al più $n + 1$ riflessioni.

[questo teorema sul Sernesi è solo in dimensione 2 (Lemma 21.1)]

Congruenza tra figure in uno spazio euclideo. Proprietà euclidee.

Oss: una proprietà euclidea è anche affine ma non viceversa.

Esercizi: la convessità è una proprietà affine.

Ref: [Ser1] Cap. 2. Sez. 20 e 21

Lunedì 27 maggio (14-16, 2 ore)

Definizione di spazio proiettivo. Coordinate omogenee.

Sottospazi.

Sottospazio generato da un insieme.

Formula di Grassmann proiettiva.

Conseguenza: intersezione fra due rette in un piano proiettivo è sempre non vuota. In tersezione tra una retta e un iperpiano è sempre non vuota.

Equazioni cartesiane e paramentriche di sottospazi.

Ref: [Ser1] Cap.3 . Sez. 24.

<u>Martedì 28 maggio (11-13, 2 ore)</u>

Proiezione da un punto.

Carte affini su $\mathbb{P}^n_K$, passaggio di coordinate da proiettive ad affini e viceversa.

Chiusura proiettiva di un sottospazio. Punti impropri.

Coordinate affini nello spazio proiettivo.

Teorema di Pappo proiettivo.

Ref: [Ser1] Cap.3 . Sez. 25.

<u>Giovedì 30 maggio (9-11, 2 ore)</u>

Prop: È equivalente dare un sistema di riferimento proiettivo e un insieme ordinato di $n+2$ punti in posizione generale.

Cambiamenti di coordinate omogenee.

Isomorfismi proiettivi e proiettività.

Prop: dati due insiemi ordiati di $n+2$ punti in posizione generale in $\mathbb{P}^n_K$, esiste un'unica una proiettività che li manda uno nell'altro (con ordine).

Definizione di figure proiettivamente equivalenti.

Es: dimostrare che sottospazi di uno spazio proiettivo sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno la stessa dimensione.

Ref: [Ser1] Cap.3 . Sez. 27.

<u>Lunedì 3 giugno (14-16, 2 ore)</u>

Esercitazioni Torelli.

<u>Martedì 4 giugno (11-13, 2 ore)</u>

Punti fissi e luogo fisso di proiettività.

Curve algebriche piane.

Trasformazione di curve con affinità / isometrie/ proiettività.

Classificazione proiettiva delle coniche su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}$.

Ref: [Ser1] Cap.4 . Sez. 28, 29, 30.

<u>Giovedì 6 giugno (9-11, 2 ore)</u>

Classificazione affine ed euclidea delle coniche su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}$.

Significato di conica a centro. Calcolo del centro di simmetria.

Ref: [Ser1] Cap.4 . Sez. 31.

Lunedì 10 giugno (11-13, 2 ore)

Esercizi sulla classificazione di coniche.

Martedì 11 giugno (11-13, 2 ore)

Esercizi di ricapitolazione (Torelli).

Giovedì 13 giugno (9-11, 2 ore)

Esercizi di ricapitolazione.