

Geometria I- Diario delle lezioni

L. Stoppino, Università di Pavia, a.a. 2019/2020

Nelle prossime pagine, adottiamo le seguenti convenzioni per le referenze:

[Kos] si riferisce a C. Kosniowski, Introduzione alla topologia algebrica, Zanichelli, Bologna 1988.

[Man] si riferisce a M. Manetti, Topologia, seconda edizione, Springer, Milano 2014.

[Mun] si riferisce a J. Munkres, Topology, Second edition, Pearson, 2000.

[Ser1] si riferisce a E. Sernesi, Geometria 1, seconda edizione, Bollati Boringhieri, Torino 2001.

[Ser2] si riferisce a E. Sernesi, Geometria 2, seconda edizione, Bollati Boringhieri, Torino 2001.

[FFP] si riferisce a E. Fortuna, R. Frigerio, R. Pardini, Geometria Proiettiva, Esercizi e richiami di teoria, Springer Milano, 2011.

Lunedì 9 marzo (11-13, 2 ore - telematiche)

Introduzione al corso.

Definizione di gruppo e di campo.

Definizione di spazi affini ed esempi.

Ref: [Ser1] Cap.1. Sez.7 (per la definizione di gruppo si veda un qualunque testo di algebra o [Ser1] Cap.1, Sez.14).

Martedì 10 marzo (14-16, 2 ore - telematiche)

Sottospazi affini. Parallelismo in geometria affine.

Sistemi di riferimenti affini e coordinate affini.

Indipendenza affine di punti. Punti allineati e complanari. Esempi.

Segmenti e insiemi convessi. n -simplessi.

Equazioni parametriche e affini di sottospazi. Intersezione di sottospazi. Interpretazione della formula di Grassmann per la dimensione della intersezione di sottospazi: dati S, T sottospazi affini di \mathbb{A}^n , se $S \cap T \neq \emptyset$, allora vale che $S \cap T$ è un sottospazio affine di \mathbb{A}^n , e

$$\dim S + \dim T - \dim S \cap T \leq \dim S \cap T \leq \min\{\dim S, \dim T\}.$$

Ref: [Ser1] Cap.1. Sez.7, 8.

Mercoledì 11 marzo (11-13, 2 ore - telematiche)

Geometria affine in dimensione 2. Rette e fasci di rette (propri e impropri).

Geometria affine in dimensione 3. Piani e fasci di piani (propri e impropri). Rette nello spazio affine tridimensionale.

Posizione reciproca di due piani, posizione reciproche di retta e piano e di due rette.

Ref: [Ser1] Cap.1. Sez. 9,10.

Giovedì 12 marzo (14-16, 2 ore - telematiche)

Esercitazioni della Dott.ssa Torelli: esercizi dal foglio 1.

Lunedì 16 marzo (11-13, 2 ore - telematiche)

Geometria affine in dimensione 2, alcuni teoremi classici: Teoremi di Talete, Pappo e Desargues.

Trasformazioni affini e affinità.

Richiami su sottogruppi ed esempi: Gruppo lineare reale e sottogruppi ortogonale e speciale.

Ref: [Ser1] Cap.1. Sez. 9, 14.

Martedì 17 marzo (14-16, 2 ore - telematiche)

Esercizi dottoressa Torelli, esercizi dal foglio 1 ed esempi importanti di affinità: (da sapere anche come parte di teoria): traslazioni, affinità che fissano un punto $Aff(\mathbb{A})_O$, omotetie, simmetria rispetto a un centro.

Ref: (per gli esempi di affinità) [Ser1] Cap.1. Sez.14.

Mercoledì 18 marzo (11-13, 2 ore - telematiche)

Struttura del gruppo affine. Affinità in coordinate.

Proprietà affini. Esempio: la convessità in uno spazio affine reale è una proprietà affine.

Affinità e indipendenza affine.

Teo: Due insiemi di $k + 1$ e $l + 1$ punti affinementemente indipendenti sono affinementemente equivalenti se e solo se $k = l$. Se, in particolare $k = l = n$ l'affinità che manda uno nell'altro (con ordine) è unica.

Corollario: Due sottospazi affini sono affinementemente equivalenti se e solo se hanno la stessa dimensione.

Ref: [Ser1] Cap. 2. Sez. 14.

Giovedì 19 marzo (14-16, 2 ore - telematiche)

Esercizi su affinità dal Foglio 1 (Torelli).

Lunedì 23 marzo (11-13, 2 ore - telematiche)

Cambiamenti di coordinate affini.

Geometria euclidea. Definizione di spazi euclidei.

Richiami sui prodotti scalari.

Ortogonalità e angoli.

Sistemi di coordinate cartesiani.

Ref: [Ser1] Cap. 2. Sez. 12 e 19.

Martedì 24 marzo (14-16, 2 ore - telematiche)

Richiami sul sottospazio ortogonale. Ortogonalità tra rette nel piano euclideo, tra piano e retta nello spazio euclideo.

Distanze. Distanza punto-retta in \mathbb{E}^2 , distanza punto-iperpiano in \mathbb{E}^n , Distanza piano-retta in \mathbb{E}^3 , distanza retta-retta.

Definizione di sfera in \mathbb{E}^n .

Richiami su operatori unitari. Isometrie (definizione di dirette e inverse).

Gruppo ortogonale $O(V) \subseteq GL(V)$.

Teorema: in \mathbb{E} spazio euclideo sono equivalenti:

- $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ un'applicazione tale che $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$ per ogni $P, Q \in \mathbb{E}$;
- f è un'affinità tale che l'automorfismo associato è un operatore unitario sullo spazio vettoriale associato.

Gruppo delle isometrie come sottogruppo delle affinità $Isom(\mathbb{E}) \subseteq Aff(\mathbb{E})$.

Esempi: le traslazioni sono isometrie. Sottogruppo $Isom_O(\mathbb{E})$ di isometrie che fissano un punto.

Isometrie in coordinate.

Ref: [Ser1] Cap. 2. Sez. 19, 20 e 21

Mcoledì 25 marzo (11-13, 2 ore-telematiche)

Isometrie in dimensione 2. Rotazioni e simmetrie rispetto ad una retta.

Def: Luogo fisso di una affinità: verifica che è un sottospazio affine.

Ancora isometrie in dimensione 2.

Riflessioni in generale e rotazioni in generale, osservazioni su queste isometrie sui loro luoghi fissi.

Teorema di Chasles di classificazione di isometria piane, con dimostrazione.

Ref: [Ser1] Cap.3 . Sez. 20 e 21.

Giovedì 26 marzo (14-16, 2 ore-telematiche)

Esercizi sugli spazi euclidei dal foglio 1 (Torelli)

Lunedì 30 marzo (11-13, 2 ore- telematiche)

Congruenza tra figure in uno spazio euclideo. Proprietà euclidee. Esempi.

Esempio importante: Riflessione rispetto ad un iperpiano. Espressione in coordinate della riflessione.

Teo: ogni isometria di uno spazio euclideo n -dimensionale è composizione di al più $n + 1$ riflessioni.

[questo teorema non c'è sul Sernesi: studiatelo sugli appunti; in dimensione 2 possiamo dedurlo dal Teorema di Chasles, in dimensione qualsiasi si chiama Teorema di Cartan-Dieudonné]

Ref: [Ser1] Cap.3 . Sez. 20. Per il teorema di Cartan-Dieudonné si vedano ad esempio questi ottimi appunti del Prof. Ottaviani, dell'Università di Firenze:

<http://web.math.unifi.it/users/ottaviani/geo1/cardie.pdf>

Martedì 31 marzo (14-16, 2 ore - telematiche)

Esercizi dal Foglio 2.

Mcoledì 1 aprile (11-13, 2 ore - telematiche)

Ancora esercizi dal Foglio 2.

Definizione di spazio proiettivo. Dimensione. Coordinate omogenee. Cambiamenti di coordinate omogenee.

Sottospazi proiettivi.

Ref: [Ser1] Cap.3 . Sez. 24.

Giovedì 2 aprile (14-16, 2 ore- telematiche)

Equazioni di sottospazi. Sottospazio generato da un insieme.

Formula di Grassmann proiettiva.

Conseguenza: intersezione fra due rette in un piano proiettivo è sempre non vuota. L'intersezione tra una retta e un iperpiano è sempre non vuota.

Definizione di insieme di punti in posizione generale.

Prop: È equivalente dare un sistema di riferimento proiettivo e un insieme ordinato di $n + 2$ punti in posizione generale.

Ref: [Ser1] Cap.3 . Sez. 24.

Lunedì 6 aprile (11-13, 2 ore- telematiche)

Carte affini su \mathbb{P}_K^n , passaggio di coordinate da proiettive ad affini e viceversa.

Chiusura proiettiva di un sottospazio. Punti impropri. Esempi.

Teorema di Pappo proiettivo.

Ref: [Ser1] Cap.3 . Sez. 25.

Martedì 7 aprile (14-16, 2 ore- telematiche)

Proiezione da un punto, definizione e qualche esempio.

Cambiamenti di coordinate omogenee. Esempi.

Esercitazioni dal capitolo 24 di [Ser1] (Torelli)

Ref: [Ser1] Cap.3 . Sez. 27

Mercoledì 8 aprile (11-13, 2 ore-telematiche)

Proiettività.

Prop: dati due insiemi ordinati di $n + 2$ punti in posizione generale in \mathbb{P}_K^n , esiste un'unica una proiettività che li manda uno nell'altro (con ordine).

Definizione di figure proiettivamente equivalenti.

Es: dimostrare che sottospazi di uno spazio proiettivo sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno la stessa dimensione.

Punti fissi e luogo fisso di proiettività.

Ref: [Ser1] 27 (nel punto 4 ci sono i luoghi fissi. Guardate anche sul [FFP] per un richiamo sui luoghi fissi di proiettività).

Mcoledì 15 aprile (11-13, 2 ore-telematiche)

Esercizi su spazi proiettivi. (Torelli)

Giovedì 16 aprile (14-16, 2 ore- telematiche)

Esercizi su spazi proiettivi. (Torelli)

Lunedì 20 aprile (11-14, 2 ore-telematiche)

Esercizi dal Foglio 5 e ricevimento online.

Martedì 21 aprile (14-16, 2 ore- telematiche)

Cenni alla dualità in geometria proiettiva.

Spazio proiettivo duale. Applicazione di dualità.

Sistema lineare di iperpiani. Corrispondenza che inverte le inclusioni tra sottospazi di \mathbb{P} di dimensione k e sottospazi di \mathbb{P}^V di dimensione $n - k - 1$.

Ref: [Ser1] Cap.3 . Sez. 26 e [FFP], Sez. 1.4.

Mercoledì 22 aprile (11-13, 2 ore-telematiche)

Teorema: principio di dualità.

Esempi.

Definizione di proposizione autoduale.

Teorema di Desargues proiettivo, e discussione sulla sua autodualità.

Ref: [Ser1] Cap.3 . Sez. 26 e [FFP], 1.4.4.

Giovedì 23 aprile (14-16, 2 ore- telematiche)

Curve algebriche piane.

Trasformazione di curve con affinità / isometrie/ proiettività.

Curve simmetriche rispetto a un punto in \mathbb{A}_K^2 , curve simmetriche rispetto a una retta in \mathbb{E}^2 .

Chiusura proiettiva di una curva affine.

Esempi.

Verifica che il supporto di una curva complessa contiene infiniti punti.

Ref: [Ser1] Cap.4 . Sez. 28

Lunedì 27 aprile (11-14, 2 ore-telematiche)

Coniche. Classificazione proiettiva delle coniche su \mathbb{C} e su \mathbb{R} .

Ref: [Ser1] Cap.4 . Sez. 29, 30.

Martedì 28 aprile (11-13, 2 ore)

Classificazione affine ed euclidea delle coniche su \mathbb{C} e su \mathbb{R} .

Significato di conica a centro. Calcolo del centro di simmetria.

Ref: [Ser1] Cap.4 . Sez. 31.

Mercoledì 29 aprile (11-13, 2 ore-telematiche)

Esercizi sulla classificazione di coniche (Torelli).

Giovedì 30 aprile (11-13, 2 ore-telematiche)

Esercizi sulla classificazione di coniche (Torelli).

Lunedì 4 maggio (11-13, 2 ore-telematiche)

Spazi metrici: Definizione ed esempi (metrica euclidea su \mathbb{R}^n , metrica discreta su un insieme qualsiasi).

Bolle negli spazi metrici. Esempi (con topologia euclidea, discreta, e con le topologie d' e d'' definite negli esercizi). Aperti negli spazi metrici.

Prop: le bolle sono aperte.

Prop: Gli aperti rispetto a una metrica sono tutte e sole le unioni di bolle.

Definizione di intorni. Intorni aperti. Teo: Un sottoinsieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.

Continuità di funzioni tra spazi metrici in un punto. Continuità.

Teorema: una funzione $f: X \rightarrow Y$ tra due spazi metrici è continua se e solo se la controimmagine di aperti in Y è aperta in X .

Prop (lasciata per esercizio): una funzione $f: X \rightarrow Y$ tra due spazi metrici è continua in $x_0 \in X$ se e solo se la controimmagine di intorni di $f(x_0)$ è un intorno di x_0 .

Proprietà degli aperti: la famiglia \mathcal{F} degli aperti per una metrica su X soddisfa le proprietà: che \emptyset e X sono aperti, \mathcal{F} è chiusa per unioni arbitrarie ed è chiusa per intersezioni finite.

Ref: [Ser2] Cap. 1, Sez. 1.

Martedì 5 maggio (14-16, 2 ore-telematiche)

Definizione di spazio topologico.

Primi esempi: topologia euclidea su \mathbb{R} ; topologia discreta e topologia concreta. Topologia cofinita. Dimostrazione che è una topologia.

Possibili topologie su insiemi con cardinalità 1, 2 e 3.

Topologia indotta da una metrica: spazi metrizzabili.

Prop. L'unica topologia metrizzabile su uno spazio finito è quella discreta.

Equivalenza topologica: due metriche d, d' su un insieme X si dicono topologicamente equivalenti se inducono la stessa topologia. Equivalenza tra metriche: due metriche d, d' su un insieme X si dicono equivalenti se esistono α, β tali che per ogni $x, y \in X$ valgono le disuguaglianze:

$$\alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y).$$

Verifica che equivalenti \Rightarrow topologicamente equivalenti (che il viceversa non vale segue dagli esercizi).

Distanza indotta da un prodotto scalare. Esempio: la metrica discreta su \mathbb{R}^n non è indotta da un prodotto scalare.

Chiusi di uno spazio topologico. Proprietà.

Topologie confrontabili, più o meno fini.

Prop. L'intersezione di topologie è una topologia.

Esempi.

Ref: [Ser2] Cap. 1, Sez 1-2.

Mercoledì 6 maggio (11-13, 2 ore-telematiche)

Topologia generata da una famiglia di sottoinsiemi. (ref. Manetti 3.1).

Definizione di *base* di una topologia.

Base di una topologia. Esempi (bolle aperte per uno spazio metrico, i singoletti sono una base per la topologia discreta, esempi su uno spazio con tre elementi).

Teorema della base (quando una famiglia di aperti può essere base di una topologia: Teorema 3.7 del Manetti).

Esempio importante: retta di Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ ([Man] Esempio 3.9, [Ser2] Esempi 2.4- 1).

Esercizio: 1) Verifica che la topologia \mathcal{T}_S è strettamente più fine di quella euclidea \mathcal{T}_e e strettamente meno fine di quella discreta \mathcal{D} . 2) Verifica che $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ è aperto per \mathcal{T}_S se e solo se $\forall x \in \mathcal{U}$ esiste $\epsilon > 0$ tale che $[x, x + \epsilon) \subseteq \mathcal{U}$.

Esercizi dal foglio 1 (topologia).

Ref: [Ser2] Cap. 1, Sez 1-2.

Giovedì 7 maggio (14-16, 2 ore).

Esercizi dal foglio 1 (topologia).

Lunedì 11 maggio (11-13, 2 ore-telematiche)

Def. di base locale/sistema fondamentale di intorni di $x \in X$.

Es: 1) le bolle centrate in un punto x sono un sistema fondamentale di intorni di x ; 2) data una base \mathcal{B} , per ogni $x \in X$ l'insieme $\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x .

Assiomi di numerabilità:

Def. spazio topologico secondo-numerabile o a base numerabile.

Esempi: uno spazio discreto (X, \mathcal{D}) è 2-numerabile se e solo se X è di cardinalità numerabile.

Def. spazio topologico primo-numerabile.

Esempi: gli spazi discreti sono 1-numerabili. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ è 1-numerabile ma non 2-numerabile ([Ser2] Esempi 2.4-6).

Prop: 2-numerabile \Rightarrow 1-numerabile.

Prop: metrizzabile \Rightarrow 1-numerabile.

Oss: uno spazio non numerabile con la topologia discreta è metrizzabile ma non è due numerabile.

Successioni in spazi topologici. Definizione di limite. Definizione di sottosuccessione.

Oss: Il limite non è necessariamente unico.

Esempi estremi: limiti in spazi discreti e limiti in spazi concreti.

Oss: In uno spazio metrico il limite di una successione se esiste è unico.

Definizione di spazio di Hausdorff o T_2 .

ES: in uno spazio T_2 i limiti sono unici.

Prop: Metrizzabile $\Rightarrow T_2$.

Definizione di spazio T_1 e T_0 .

Oss: $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Controesempi che mostrano che non valgono le implicazioni inverse.

Prop: uno spazio topologico X è T_1 se e solo se i punti sono chiusi.

Definizione di spazi T_3 e T_4 . Controesempio che mostra che in generale $T_3 \not\Rightarrow T_2, T_1, T_0$ e $T_4 \not\Rightarrow T_2, T_1, T_0$.

Spazi regolari, spazi normali. Prop: regolare $\Rightarrow T_2$
normale \Rightarrow regolare.

Esempio di spazio topologico non 1-numerabile: Uno spazio non numerabile con la topologia cofinita.

Classificazione dei punti rispetto a un sottoinsieme: interno esterno e di frontiera: verifica che Int , Est e Fr formano una partizione di X .

Ref: [Ser2] Cap. 1. Sez 2 e 3, per le proprietà di separazione: [Ser2] Cap 3 sez 8, [Kos] Cap 8.

Martedì 12 maggio (14-16, 2 ore-telematiche).

Classificazione dei punti rispetto a un sottoinsieme: interno esterno e di frontiera: verifica che Int , Est e Fr formano una partizione di X .

Prime proprietà.

- 1) $\text{Int}(S)$ è l'unione degli aperti contenuti in S ;
- 2) $\text{Int}(S) = S$ se e solo se S è aperto;
- 3) S è aperto se e solo se $S \cap \text{Fr}(S) = \emptyset$.

Esempi ed esercizi.

Chiusura di un insieme: $\bar{S} := \text{Int}(S) \cup \text{Fr}(S) = S \cup \text{Fr}(S)$.

Prop: la chiusura di un insieme è l'intersezione di tutti i chiusi che lo contengono.

Esempi. (Ref. anche [Man] 3.1 e 3.2).

Punti di accumulazione: $x \in X$ è un punto di accumulazione per S se ogni intorno di x contiene almeno un punto di S diverso da x . Derivato $D(S)$: insieme dei punti di accumulazione.

Prop: $\bar{S} = D(S) \cup S$.

Proposizione: sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X . Allora:

- 1) un punto $x \in X$ è aderente a S (cioè appartiene a \bar{S}) se e solo se per ogni intorno $U \in I(x)$ vale $U \cap S \neq \emptyset$.
- 2) un punto $x \in X$ è aderente a B se esiste una successione di elementi in B che converge a x . Se X è primo numerabile allora vale anche il viceversa.

Definizioni ed esempi di sottospazi densi. Esempi importanti: densità di \mathbb{Q} in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$. Densità in spazi discreti e in spazi concreti.

Def. Spazio topologico separabile.

Esempi.

Lemma: secondo numerabile \Rightarrow separabile.

Lemma: metrizzabile + separabile \Rightarrow secondo-numerabile.

Oss: dunque $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ è 2-numerabile.

Esercizi:

Poichè $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non è 2-numerabile, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non è metrizzabile (essendo separabile).

Prop: uno spazio metrizzabile è normale (per la dimostrazione abbiamo seguito [Man] Prop. 7.31).

Prop: regolare e 2-numerabile \Rightarrow normale (non l'abbiamo dimostrato, per referenza si può vedere [Man] Teorema 7.36).

Lemma di Urysohn (senza dimostrazione).

Teorema di metrizzabilità di Urysohn: normale + 2-numerabile \Rightarrow metrizzabile. (senza dimostrazione)

Per referenza: una dimostrazione molto chiara si può trovare su [Mun], Cap. 4 Sez. 34)

Ref: [Ser2] Cap. 1. Sez 2 e 3. e Cap. 2. Sez 8.

Mercoledì 13 maggio (11-13, 2 ore-telematiche)

Definizione di continuità ed esempi. Discussione sulla continuità dell'applicazione identica.

Lemma: $f: X \rightarrow Y$ continua se e solo se per ogni $x \in X$, dato un qualunque intorno \mathcal{N} di $f(x)$, esiste un intorno \mathcal{M} di x tale che $f(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}$.

Lemma: $f: X \rightarrow Y$ continua se e solo se per ogni $S \subseteq X$ $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$.

Teo: composizione di applicazioni continue è una applicazione continua.

Definizione di continuità in un punto.

Teo: f è continua se e solo se è continua in ogni punto.

Def: applicazioni aperte e chiuse.

Lemma: data $f: X \rightarrow Y$ biiettiva sono equivalenti:

- f è aperta;
- f è chiusa.
- L'inversa $g = f^{-1}: Y \rightarrow X$ è continua.

Definizione di omeomorfismo. Definizione di spazi omeomorfi. Essere omeomorfi è una relazione di equivalenza.

Definizione di proprietà topologica. Verifica che le proprietà di numerabilità, separabilità e separazione sono proprietà topologiche. Essere limitati rispetto a una metrica non è topologica, anzi non ha senso (uno spazio può essere limitato con una metrica e non limitato con un'altra topologicamente equivalente alla prima).

Esercizi ed esempi: - verifica che $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ è 2-numerabile.

- verifica che $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non è 2-numerabile.

- Esempio di spazio T2 non T3 (Sernesi Cap.3 Sez8)

Ref (per la parte di teoria): [Ser2] Cap. 1. Sez 4.

Giovedì 14 maggio (14-16, 2 ore).

Esercizi dal Foglio 2 di Topologia (Torelli).

Lunedì 18 maggio (11-13, 2 ore-telematiche)

Topologia di sottospazio. Esempio: il caso degli spazi metrici.

Definizione di sottospazio topologico.

Prop: se $A \subseteq Y$ e $Y \subseteq (X, \mathcal{T})$ allora la chiusura di A in Y (che denotiamo \overline{A}^Y) coincide con l'intersezione della chiusura di A con Y .

Prop: siano $E \subseteq Y \subseteq X$. Allora

1. Se Y è aperto in X allora $E \subseteq Y$ è aperto in Y se e solo se E è aperto in X ;
2. Se Y è chiuso in X allora $E \subseteq Y$ è chiuso in Y se e solo se E è chiuso in X ;
3. Se Y è intorno di y in X allora E è intorno di y in Y se e solo se è intorno di y in X .

Prop: Dato $S \subseteq X$ sottospazio di uno spazio topologico, l'inclusione $i: S \rightarrow X$ è continua, ed è aperta se e solo se S è aperto in X , chiusa se e solo se S è chiuso in X .

Sottospazi discreti. (ref. [Ser2] Cap. 2. Sez 5, Esercizio 8) Esercizi sui sottospazi discreti.

Proiezione stereografica: definizione, calcolo esplicito in coordinate e calcolo esplicito della applicazione inversa.

Dunque per ogni $P \in S^n$ esiste un omeomorfismo tra $S^n \setminus \{P\}$ ed \mathbb{R}^n .

Ref: [Ser2] Cap. 2. Sez 5.

Martedì 19 maggio (14-16, 2 ore-telematiche)

Definizione di topologia prodotto. Base canonica per la topologia prodotto.

Prop: la topologia prodotto è la meno fine delle topologie su $X \times Y$ che rendono continue le due proiezioni. Le proiezioni sono aperte (ma non sempre chiuse: controesempio);

Teo: un'applicazione in uno spazio prodotto è continua se e solo se lo sono le sue componenti; le fibre sono omeomorfe alle componenti.

Teo: X è T2 se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto.

Es: il prodotto di elementi di base è una base per la topologia prodotto. In particolare la topologia prodotto su \mathbb{R}^n indotta dalla topologia euclidea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ è la topologia euclidea.

Esercizio importante: se $f: X \rightarrow Y$ è un'applicazione tra spazi topologici. Se esiste \mathcal{B} una base di X tale che per ogni $B \in \mathcal{B}$ l'insieme $f(B)$ è aperto in Y , allora f è aperta.

Prop: se uno spazio topologico X separabile contiene un sottoinsieme chiuso discreto non numerabile, allora X non è normale. (non dimostrato)

Esempio: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ è normale, ma $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ non lo è.

Definizione del toro $S^1 \times S^1$. Toro come sottovarietà di \mathbb{R}^3 .

Ref: [Ser2] Cap. 2. Sez 6, Cap. 3, Sez 8.

Mercoledì 20 maggio (11-13, 2 ore-telematiche)

Spazi quoziente.

Definizione di topologia indotta \mathcal{T}_f da una mappa $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow Y$ e prime proprietà (in particolare verifica che è la più fine topologia che rende continua f).

Esercizio: Sia Y lo spazio quoziente di uno spazio X relativo ad una suriezione $f: X \rightarrow Y$. Vale che $C \subseteq Y$ è chiuso se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X .

Definizione di sottoinsiemi saturi. Verifica che un sottoinsieme $B \subset Y$ è aperto se e solo se è immagine di un aperto saturo A di X .

Osservazione: non è vero in generale che f è aperta nè chiusa.

Esempio importante: $e: [0, 1] \rightarrow S^1$ definita da $e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ è un'identificazione chiusa ma non aperta.

Teorema: (proprietà universale dello spazio quoziente): Siano X, Z spazi topologici, Y un insieme. Siano $f: X \rightarrow Y, g: Z \rightarrow Y$ applicazioni con f suriettiva e g continua.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & \swarrow \exists h? & \\ Z & & \end{array} \quad (1)$$

Allora esiste $h: (Y, \mathcal{T}_f) \rightarrow Z$ continua tale che $g = h \circ f$ se e solo se g è costante sulle fibre di f . Inoltre, h è aperta (risp. chiusa) se g è aperta (risp. chiusa).

Osservazione importante: ogni relazione di equivalenza \sim su un insieme X corrisponde ad un'opportuna applicazione suriettiva da X e viceversa. Data una relazione di equivalenza su uno spazio topologico chiamiamo spazio quoziente X/\sim l'insieme delle classi di equivalenza con la topologia quoziente indotta dalla proiezione al quoziente $\pi: X \rightarrow X/\sim \pi(x) = [x]$.

Se $S \subseteq X$, consideriamo la relazione di equivalenza: $x \sim x'$ sse $x = x'$ oppure $x, x' \in S$. Lo spazio quoziente $X/\sim = X/S$ si chiama contrazione di S ad un punto. Esempi di contrazioni ad un punto.

Esercizio importante: la contrazione a un punto $[0, 1]/\{0, 1\} \sim S^1$.

Esercizio: se $f: X \rightarrow Y$ e $g: X \rightarrow Z$ sono due identificazioni con le stesse fibre, allora $Y \sim Z$.

Dunque abbiamo una topologia sugli spazi spazio proiettivi reali e complessi.

Esercizio: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \sim S^1 \quad \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \sim S^2$

Esercizio: un quoziente topologico $f: X \rightarrow Y$ è T1 se e solo se per ogni $p \in Y$ la fibra su p $f^{-1}(p)$ è chiusa in X .

Esercizio: la restrizione della mappa esponenziale $[0, 1] \rightarrow S^1$ è un'identificazione chiusa. La restrizione a $[0, 1) \rightarrow S^1$ non lo è.

Esercizio: Un quoziente è T1 se e solo se le fibre sono chiuse.

Ref: [Ser2] Cap. 2. Sez 7.

Giovedì 21 maggio (14-16, 2 ore-telematiche).

Esercizi Torelli

Lunedì 25 maggio (11-13, 2 ore-telematiche)

Definizione di compattezza.

Esempi: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ non è compatto; uno spazio concreto è sempre compatto; uno spazio di cardinalità finita è sempre compatto; uno spazio discreto è compatto se e solo se è finito.

Teo: dato uno spazio topologico X e una sua base. Sono equivalenti: X è compatto e ogni ricoprimento di X composto di elementi della base possiede un sottoricoprimento finito.

Teo: $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ è compatto con la topologia euclidea.

Teo: (i) Chiuso in un compatto è compatto. (ii) Compatto in un T2 è chiuso. (iii) Unione finita di compatti è compatto.

Cor: Compatto in \mathbb{R} se e solo se chiuso e limitato.

Teo: immagine tramite continua di compatti è compatta.

Cor: la compattezza è una proprietà topologica. Uno spazio quoziente di uno spazio compatto è compatto.

Prop: Un'applicazione continua da un compatto a uno spazio di Hausdorff è chiusa. Dunque in particolare un'applicazione continua e suriettiva da un compatto a un T2 è un'identificazione chiusa.

Verifica che $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ e $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ sono compatti.

Ref: [Ser2] Cap. 2. Sez 7. e Cap. 3. Sez. 9.

Martedì 26 maggio (14-16, 2 ore-telematiche).

Teorema di Weierstrass come corollario dei risultati precedenti.

Teorema di Tychonoff: Il prodotto di due spazi topologici compatti è compatto.

Per la dimostrazione abbiamo usato il Lemma del Tubo: Siano X, Y spazi topologici con X compatto. Sia $\bar{y} \in Y$. Sia \mathcal{W} un aperto di $X \times Y$ che contiene la fibra $q^{-1}(\bar{y}) = X \times \{\bar{y}\}$. Allora esiste un aperto \mathcal{V} tale che $\bar{y} \in \mathcal{V}$ e $X \times \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$.

La referenza dove questo Lemma è esplicitamente scritto è [Mun], Cap. 3, Sez. 5.

Cor: (Heine-Borel) Un sottospazio di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Prop: (a) in uno spazio topologico compatto ogni sottoinsieme infinito possiede almeno un punto di accumulazione. (b) In uno spazio topologico X compatto T1 e 1-numerabile, ogni successione possiede sottosuccessioni convergenti.

Def. di compatto per successioni.

Prop: X secondo-numerabile. Sono equivalenti: (1) X compatto; (2) X compatto per successioni.

Cenni alla completezza in spazi metrici e alla generalizzazione di Heine-Borel in spazi metrici.

Es: compatto e T2 \Rightarrow normale.

Es: Se Y è compatto e $f: X \rightarrow Y$ continua chiusa tale che $\forall y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ è compatta in X , allora X è compatto.

Ref: [Ser2] Cap. 3. Sez. 9 e per la parte finale sulla compattezza in spazi T1 e T2 [Man] Sez. 6.2.

Mercoledì 27 maggio (11-13, 2 ore-telematiche).

Esercizi ed esempi sulla compattezza. Esercitazioni (Torelli)

Giovedì 28 maggio (9-11- 2 ore)

Connessione: definizione e proprietà equivalenti. Primi esempi. Sottospazi connessi.

Teo: Gli intervalli in \mathbb{R} con la topologia euclidea sono tutti e soli i sottospazi connessi.

Lemma: sia X uno spazio topologico $Y \subseteq X$ un connesso e sia W tale che $Y \subseteq W \subseteq \bar{Y}$. Allora Y è connesso.

Lemma: l'unione di una famiglia di connessi che contengono un punto è connessa.

Lemma: X spazio topologico $A \subseteq X$ aperto e chiuso. $Y \subseteq X$ connesso. Allora $Y \subseteq A$ oppure $Y \subseteq X \setminus A$.

Teo: immagine tramite continua di connessi è connesso.

Cor: la connessione è una proprietà topologica e il quoziente di un connesso è connesso.

Esempio importante: i convessi in \mathbb{R}^n sono connessi. Esempio: Connessione di S^n . Connessione degli spazi proiettivi. Esempio: $[a, b]$, $[a, b)$ e $(a, b]$ sono tutti non omeomorfi tra loro.

Teo: prodotto di spazi connessi è connesso.

Ref: [Ser2] Cap. 3. Sez. 11 e 12.

Lunedì 1 giugno (11-13, 2 ore-telematiche)

Definizione di arco tra due punti di uno spazio topologico. Definizione di connessione per archi.

Teo: uno spazio connesso per archi è connesso.

Esempio di uno spazio connesso non connesso per archi: la pulce e il pettine (ref: [Kos], cap 12).

Esercizio: definizione di sottoinsieme stellato di \mathbb{R}^n . Verifica che sono connessi per archi.

Prop: la connessione per archi è una proprietà topologica. Prop: il prodotto di due spazi connessi per archi è connesso per archi.

Esempio: Connessione per archi di S^n , e degli spazi proiettivi.

Def: connessione e connessione per archi locale ([Ser2] esercizio 10 cap 3 sez. 11).

Teo: Uno spazio topologico X connesso e localmente cpa è cpa. Cor: un aperto connesso di \mathbb{R}^n è connesso per archi.

Esercizio: totale sconnessione. Totale sconnessione di \mathbb{Q} con la topologia euclidea, e di $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$.

Ref: [Ser2] Cap. 3. Sez. 11 e 12.

Mercoledì 3 giugno (11-13, 2 ore-telematiche)

Definizione di componente connessa.

Teo: per ogni punto di uno spazio topologico esiste un'unica componente connessa che lo contiene. Le componenti connesse inoltre sono chiuse.

Esempio: Le componenti connesse di $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sono i punti (e non sono aperti).

Lemma: le componenti connesse sono aperte se e solo se ogni punto possiede un aperto connesso.

Definizione di componenti connesse per archi.

Esempio: componenti connesse e connesse per archi della pulce e il pettine. (dunque le componenti connesse per archi non sono necessariamente chiuse, a differenza di quelle connesse).

Esercizio importante: il numero di componenti connesse di uno spazio topologico è un invariante topologico.

Giovedì 4 giugno (11-13, 2 ore-telematiche)

Esercizi sulla connessione (Torelli)