Geometria I

CdL in Matematica

Università di Pavia

Prova scritta del 10 settembre 2019

Giustificare sempre le risposte.

1. [12 punti] Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio] Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici.

- (a) Se $E \subseteq X$ è un sottoinsieme denso di X , allora necessariamente $f(E)$ è denso in $f(X)$.
- (b) Se $E \subseteq X$ è un sottoinsieme denso di X , allora necessariamente $f(E)$ è denso in Y .
- (c) Se $D \subseteq Y$ è un sottoinsieme denso di Y , allora necessariamente $f^{-1}(D)$ è denso in X .
- (d) Se f è aperta e $D \subseteq Y$ è un sottoinsieme denso di Y , allora necessariamente $f^{-1}(D)$ è denso in X .

2. [10 punti] Ricordiamo che dato un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ il suo involuppo convesso $i(S)$ è l'intersezione dei sottospazi convessi di $\mathbb{R}^n$ che lo contengono.

- (a) Dimostrare che per ogni $S \subseteq \mathbb{R}^n$, l'involuppo convesso $i(S)$ è connesso.
- (b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^n$ l'involuppo convesso dei punti $Q_0 = (0, \dots, 0)$, $Q_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ... $Q_n = (0, \dots, 0, 1)$. Dimostrare che

$$\Delta_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, x_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

- (c) Trovare la chiusura $\overline{\Delta_n}$, la parte interna Δ_n° e la frontiera $Fr(\Delta_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
 - (d) Stabilire se Δ_1 è omeomorfo a Δ_n e/o a $Fr(\Delta_n)$ per qualche $n \geq 2$.
3. [9 punti] Si considerino in $P_{\mathbb{R}}^3$ i punti $P_1 = [1, 0, 1, 2]$, $P_2 = [0, 1, 1, 1]$, $P_3 = [2, 1, 2, 2]$, $P_4 = [1, 1, 1, 0]$.

- (a) Dire se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.
- (b) Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da P_1, P_2, P_3, P_4 e se ne determinino (la/le) equazioni cartesiane.
- (c) Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.