Geometria I

CdL in Matematica

Università di Pavia

Prova scritta del 21 gennaio 2020

Giustificare sempre le risposte.

1. [12 punti] Vero o falso? [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio] Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici. Diciamo che la funzione $f: X \rightarrow Y$ soddisfa la proprietà (P) se vale che:

$\forall C \subseteq Y$ tale che C è compatto in Y , $f^{-1}(C) \subseteq X$ è compatto in X .

- (a) Ogni $f: X \rightarrow Y$ come nelle ipotesi soddisfa la proprietà (P). [3 punti]
(b) Se Y ha la topologia discreta, allora $f: X \rightarrow Y$ soddisfa la proprietà (P). [3 punti]
(c) Se X e Y hanno la topologia discreta e $f: X \rightarrow Y$ soddisfa la proprietà (P), allora $f^{-1}(y)$ è un insieme finito, per ogni $y \in Y$. [3 punti]
(d) Se $f: X \rightarrow Y$ è inoltre aperta e Y è T^2 , allora vale la proprietà (P). [3 punti]
2. [10 punti + 2 punti bonus] Si consideri la famiglia di sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea), dipendenti da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$X_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (xy - a)(x^2 + y^2 - 1) = 0\};$$

Si consideri inoltre la famiglia di sottospazi quozienti $Y_a = X_a / \sim$ ottenuto dalla famiglia di spazi X_a tramite la seguente relazione di equivalenza: $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $(x, y) = (x', y')$ oppure $xy = x'y' = a$.

- (a) Stabilire per quali valori di $a \geq 0$ lo spazio X_a è connesso, per quali è compatto e per quali valori è T^2 [3 punti];
(b) Suddividere gli X_a in classi di omeomorfismo al variare di $a \in \mathbb{R}$. [3 punti]
(c) Stabilire per quali valori di $a \geq 0$ lo spazio Y_a è connesso, per quali è compatto e per quali valori è T^2 [4 punti]
(d) Sia ora $Z = D / \sim^2$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, ottenuto mediante la relazione di equivalenza: $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $(x, y) = (x', y')$ oppure $(x^2 + y^2 < 1$ e $x'^2 + y'^2 < 1)$. Stabilire se Z è omeomorfo a a per qualche $a \geq 0$. [2 punti bonus!]
3. [9 punti] Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $\mathcal{C}: 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 8 = 0$ nel piano euclideo E^2 .
- (a) La si classifichi dal punto di vista euclideo e affine. Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{E}^2$.
(b) Determinare il cambiamento di coordinate euclidee necessario affinché assuma tale equazione.
(c) Si scriva l'equazione della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ e se ne calcolino i punti impropri.