

Geometria I
CdL in Matematica
Università di Pavia
Prova scritta del 21 gennaio 2022

Giustificare sempre le risposte.

1. [16 punti] Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 2xy - 2y = 0$$

nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$.

- (a) La si classifichi dal punto di vista affine. Determinare l'equazione canonica affine.
 - (b) Determinare l'equazione canonica euclidea e il cambiamento di coordinate euclidee necessario affinché assuma l'equazione canonica.
 - (c) Si scriva l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ e se ne calcolino i punti impropri.
 - (d) Si considerino punti $P = [-2, 2, 1]$ e $Q = [1, -1, 3]$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Si trovi l'equazione della retta $L(P, Q)$. Si trovi l'intersezione tra il supporto di $\overline{\mathcal{C}}$ e $L(P, Q)$.
2. [16 punti] Si discutano le seguenti affermazioni [se vero spiegate perchè, se falso esibite un controesempio]

Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici.

- (a) Se f è biiettiva, allora è un omeomorfismo.
- (b) Se f è iniettiva e Y ha la topologia discreta, allora anche X ha la topologia discreta.
- (c) Se f è iniettiva e Y ha la topologia concreta, allora anche X ha la topologia concreta.
- (d) Se f è biiettiva e Y è connesso, allora anche X è connesso.
- (e) Se f è suriettiva, X è compatto e Y è di Hausdorff, allora f è un'identificazione (cioè la topologia su Y è la topologia quoziente).

Soluzioni compito 21 gennaio 2022 - Geometria 1

1) $C: x^2 + y^2 - 2xy - 2y = 0$

(a) Scrivo la matrice associata:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{è non-degenera}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A' = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{è una parabola}$$

Equazione canonica affine: $xy = x^2$ parabola non-degenera

(b) Diagonalizziamo A' :

Autovalori: 0, 2 autospazi: $V_0 = \ker A' = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V_2 = \ker(A' - 2I) = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Cambiamento di coordinate che diagonalizza la parte omogenea

di grado 2: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Equazione con le nuove coordinate $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$$x'^2 - 2 \left(\frac{-x' + y'}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$(x')^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} x' - \frac{2}{\sqrt{2}} y' = 0$$

completo il quadrato per x'

$$\left(x' + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = x'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y' \end{pmatrix}$$

$$C: (x'')^2 - \sqrt{2} y'' - \frac{1}{2} = 0$$

oia traslo $\begin{cases} X = x'' \\ Y = y'' + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

$$\sqrt{2} \left(y'' + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

Equazione canonica euclidea:

$$X^2 - \sqrt{2} Y = 0$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y' + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Questo è il cambiamento di coordinate euclidee che porta $\mathcal{C}$ in forma canonica.

(c) Chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$:

$$\overline{\mathcal{C}} : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_0 = 0$$

Iperpiano all'infinito : $x_0 = 0$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{punti all'infinito} \quad (x_1 - x_2)^2 = 0$$

$\text{supp}(\overline{\mathcal{C}}) \cap H_0 = \{[0, 1, 1]\}$ è l'unico punto all'infinito.

$$(d) \quad P = [2, -2, 1] \quad Q = [-1, 1, 3]$$

$$L(P, Q) : \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} x_0 - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} x_2 =$$

$$= -7x_0 - 7x_1 = 0$$

$$x_0 + x_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -x_1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} = \text{supp } \overline{\mathcal{C}} \cap L(P, Q) = \emptyset$$

2) $f: X \rightarrow Y$ applicazione continua tra spazi topologici:

a) Se f è biettiva allora è un omeomorfismo

FALSO. Controesempio: l'identità da $\mathbb{R}$ in sé con queste

$$\text{topologie } \varphi = \text{id}_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, \mathcal{D}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{C})$$

è una applicazione continua:

$$\varphi^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \mathcal{D} \quad \varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{D}$$

ma non è un omeomorfismo. Ad esempio $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ è sconnesso, mentre $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ è connesso.

b) Se Y ha la topologia discreta e f è iniettiva, allora X ha la topologia discreta.

vero: $f: X \hookrightarrow Y$

Sia $S \subseteq X$ qualunque sottoinsieme.

$$\text{Siccome } f \text{ è iniettiva} \quad S = f^{-1}(f(S))$$

$f(S) \subseteq Y$ è aperto in Y poiché $\mathcal{T}_Y = \mathcal{P}_Y$

Siccome f è continua, allora $f^{-1}(f(S)) \in \mathcal{T}_X$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_X = \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{T}_X \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_X = \mathcal{T}_X$$

c) Se f è iniettiva e Y ha la topologia coerata, allora X ha la topologia coerata. FALSO: il controesempio del punto (a) va bene anche qui.

d) Se f è biettiva e Y è connesso, allora anche X è connesso. Falso: di nuovo va bene l'esempio del punto (a).

e) Sia f suriettiva, X compatto e Y T_2 . Allora f è una identificazione. VERA.

Dimostriamo:

1) $f: X \rightarrow Y$ ^{continua} con X compatto e Y di Hausdorff è chiusa: Sia $C \subseteq X$ un chiuso.

Siccome C è chiuso in X compatto, C è compatto. $f(C)$ è immagine tramite continua di un compatto, quindi è compatto. Ma un compatto in uno spazio T_2 è chiuso, quindi $f(C)$ è chiuso.

2) $f: X \rightarrow Y$ suriettiva continua e chiusa è una identificazione chiusa:

Verifichiamo che τ_Y è la topologia quoziente:

$$\tau_Y = \{ V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \tau_X \}$$

Posso anche verificare sui chiusi che

$$\text{Chiusi di } Y = \{ C \subseteq Y \mid f^{-1}(C) \text{ è chiuso in } X \}$$

Siano

||

$\mathcal{C}$ i chiusi di Y e sia $\mathcal{C}'$ questo insieme.

Siccome f è continua $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$

Ora prendo $C \in \mathcal{C}'$ cioè $C \subseteq Y$ tale che $f^{-1}(C)$ è chiuso in X , e voglio vedere che $C \in \mathcal{C}$, cioè che C è chiuso in Y .

$$f(\underbrace{f^{-1}(C)}_{\text{chiuso in } X}) = C \text{ perché } f \text{ è suriettiva}$$

Siccome f è chiusa $\Rightarrow C$ è chiuso come volevo.