

Geometria I

CdL in Matematica

Università di Pavia

Prova scritta telematica dell'8 luglio 2020

Giustificare sempre le risposte.

1. [15 punti] Si considerino in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ i punti

$$P_1 = [2, 1, -1], P_2 = [0, 1, 1], P_3 = [1, -1, 2].$$

- (a) I punti P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale?
- (b) Si scriva l'equazione cartesiana per la retta tra P_1 e P_2 .
- (c) Trovare, se esistono, due punti $Q, R \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, tale che P_1, P_2, P_3, Q, R siano in posizione generale.
- (d) Esibire, se esiste, una proiettività che mandi, rispettivamente, $[1, 0, 0]$ in P_1 , $[0, 1, 0]$ in P_2 , $[0, 0, 1]$ in P_3 . Quante proiettività esistono che soddisfano queste condizioni?
- (e) Scrivere la proposizione duale di: P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, e verificarla.

2. [15 punti] Si consideri la topologia cofinita \mathcal{K} su \mathbb{R} :

$$\mathcal{K} := \{A \subseteq \mathbb{R} \text{ tale che } \mathbb{R} \setminus A \text{ ha cardinalità finita}\} \cup \{\emptyset\}$$

- (a) Lo spazio $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è confrontabile con $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$? Se sì, è più o meno fine?
- (b) Di quali proprietà di numerabilità gode questa topologia? Cioè è primo e/o secondo numerabile?
- (c) Lo spazio $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è connesso? È connesso per archi?
- (d) Lo spazio $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è compatto?
- (e) Discutere la continuità di funzioni polinomiali da $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$. Esiste una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che f sia continua con le topologia euclidea nel dominio e nel codominio ma non sia continua con la topologia \mathcal{K} nel dominio e nel codominio.