Geometria I

CdL in Matematica
Università di Pavia
Prova scritta del 21 giugno 2019
Giustificare sempre le risposte.

1. Vero o falso? [se vero dimostratelo o spiegate perché, se falso esibite un controesempio]

   (a) Un'applicazione biiettiva e aperta tra due spazi topologici è sempre un omeomorfismo. *[2,5 punti]*

   (b) Un'applicazione biiettiva tra due spazi topologici è aperta se e solo se è chiusa. *[2,5 punti]*

   (c) Un'applicazione continua da uno spazio topologico compatto ad uno spazio topologico T2 è sempre chiusa. *[2,5 punti]*

   (d) Un'applicazione continua da uno spazio topologico compatto ad uno spazio topologico T2 è sempre aperta. *[2,5 punti]*

2. Si consideri la seguente famiglie di sottospazi di $\mathbb{R}^2$, con la topologia eulcidea, dipendenti da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$X_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - a^2)(x^2 + y^2 - 4x + 3) = 0\} \subset \mathbb{R}^\cdot$$

   (a) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ lo spazio X_a è compatto, e per quali è connesso. *[3 punti]*

   (b) Suddividere gli X_a in classi di omeomorfismo al variare di $a \in \mathbb{R}$. *[4 punti]*

   (c) Sia ora $Y = S^1/\sim$ lo spazio quoziente ottenuto dalla circonferenza unitaria S^1 tramite la seguente relazione di equivalenza $(x, y) \sim (x', y')$ se e solo se $(x, y) = (x', y')$ oppure $|x| = |x'| = 1$. Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ lo spazio Y è omeomorfo a X_a. *[3,5 punti]*

3. Si considerino i seguenti 4 punti in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$: $P_0 = [1, 0, 0]$, $P_1 = [1, 1, 0]$, $P_2 = [1, 1, 1]$, $P_3 = [2, 0, 1]$;

   (a) Verificare se sono in posizione generale (definire un insieme di punti in posizione generale). *[3 punti]*

   (b) Determinare, se esistono, tutte le proiettività f tali che $f(P_i) = P_i$ Per ogni $i = 0, \ldots, 3$. *[2,5 punti]*

   (c) Determinare, se esistono, tutte le proiettività f tali che $f([1, 0, 0]) = P_0$, $f([0, 1, 0]) = P_1$, $f([0, 0, 1]) = P_2$, $f([1, 1, 1]) = P_3$. *[3 punti]*

   (d) Scrivere l'equazione della retta r tra P_2 e P_3. Determinare, se esistono, tutte le proiettività f di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che hanno come luogo fisso r e P_0. *[3 punti]*

Soluzioni di Geometria 1

21 giugno 2019 L. Stoppino

1) vero o falso:

a) Un'applicazione biiettiva e aperta tra due spazi topologici è sempre un omeomorfismo.

FALSO Ad esempio prendo $f = id_{\mathbb{R}}$ (che ovviamente è biiettiva) $f : (\mathbb{R}, \tau_e) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{D})$

con τ_e topologia euclidea $\mathcal{D}$ topologia discreta

Poiché $\tau_e \subseteq \mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ f è aperta: $\forall\, \mathcal{U} \in \tau_e$ $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \in \mathcal{D}$

Poiché $\tau_e \nsupseteq \mathcal{D}$ f non è continua: ad esempio $\{1\} \in \mathcal{D}$ ma $f^{-1}(\{1\}) = \{1\} \notin \tau_e$.

b) f biiettiva tra spazi topologici è aperta solo se è chiusa

$f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ biiettiva

VERO sia f aperta: se $C \subseteq X$ è chiuso allora

$X \setminus C \in \tau_X \Rightarrow f(X \setminus C) \in \tau_Y$

ma $f(X \setminus C) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ iniettiva}}}{=} f(X) \setminus f(C) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ suriettiva}}}{=} Y \setminus f(C)$

dunque $Y \setminus f(C) \in \tau_Y$ cioè $f(C)$ è chiuso in Y.

Sia f chiusa.

Se $\mathcal{U} \in \tau_X \Rightarrow X \setminus \mathcal{U}$ è chiuso in X

e $f(X \setminus \mathcal{U})$ è chiuso in Y.

D'altra parte $f(X \setminus \mathcal{U}) = f(X) \setminus f(\mathcal{U}) =$
$= Y \setminus f(\mathcal{U})$

(come prima) quindi

$f(\mathcal{U})$ è aperto in Y

(c) vero f continue da un compatto a un T2 è chiusa.

Sappiamo che : 1) chiuso in un compatto è compatto
2) immagine tramite continue di un compatto è compatta
3) un compatto in uno spazio T2 è chiuso.

Sia dunque $f: X \to Y$ continue con X compatto e Y T2. Sia $C \subseteq X$ un chiuso. Poichè C e' chiuso in un compatto X, per (1) C è compatto.

Poichè f è continua, $f(C)$ è un sottospazio compatto di Y per (2)

Poichè $f(C)$ è compatto in Y che è T2, allora per (3) $f(C)$ è chiuso in Y.

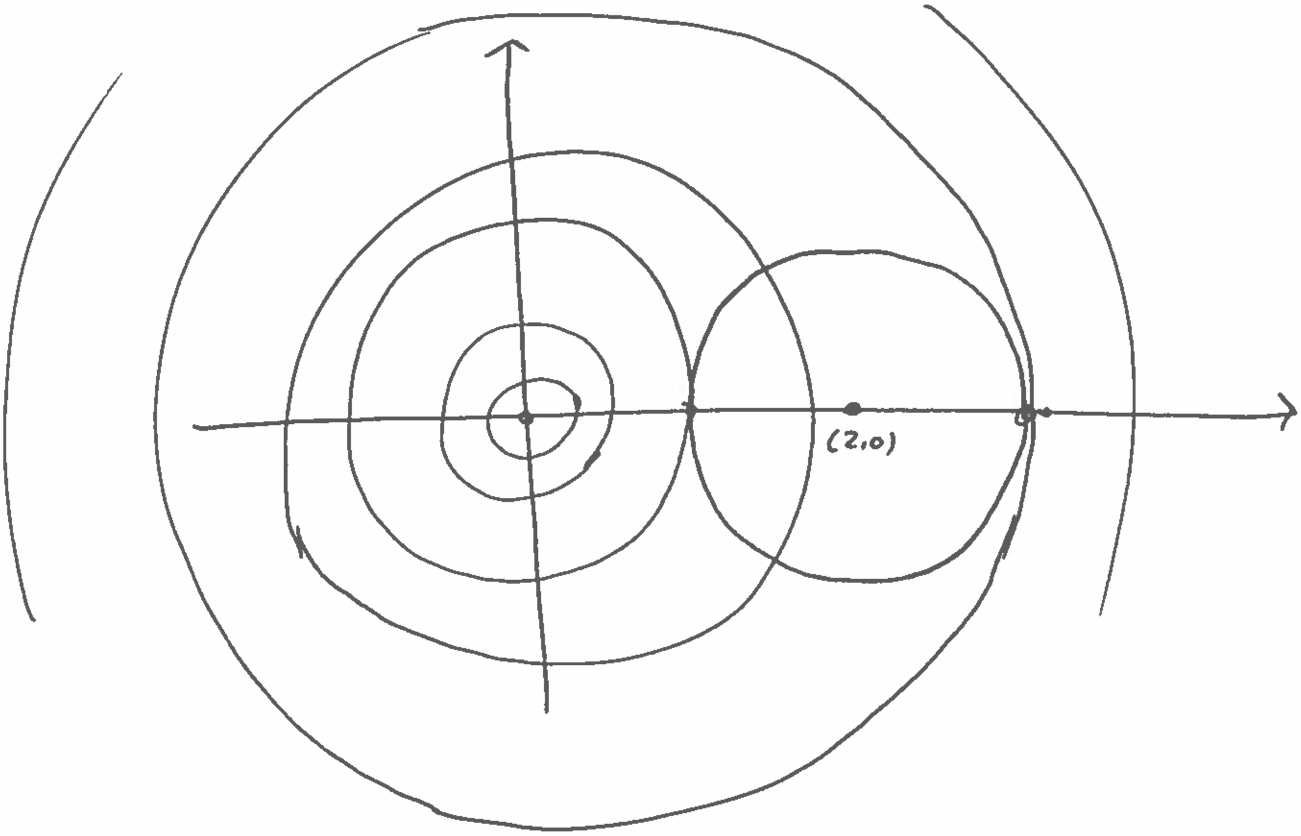
(d) Una applicazione continua da un compatto a un T2 è sempre aperta

FALSO (OSS: per quanto visto prima, se prendo f biiettiva continue da un compatto a un T2 è chiusa e dunque aperta, quindi di certo dobbiamo prendere f non biiettiva!)

prendo l'inclusione

$$i : ([0,1], \tau_{e|[0,1]}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$$
$$x \longmapsto x$$

è continua, $[0,1]$ è compatto, $\mathbb{R}$ è T2 ma i non è aperta: ad esempio $[0,1]$ è aperto in $[0,1]$ ma $i([0,1]) = [0,1]$ non è aperto in $\mathbb{R}$.



Se $|a|>0$ X_a è unione di una circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $|a|$ con la circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio 1. Chiamo la prima C_a e la seconda C

se $|a|=0$ $X_0 = \{(0,0)\} \cup C$, unito al punto $(0,0)$ (che è esterno a C)

(a) Considero $f(x,y)=(x^2+y^2-a^2)((x-2)^2+y^2-1)$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ è un'applicazione continua, dunque

$X_a = f^{-1}(0)$ è un <u>chiuso</u> in $\mathbb{R}^2$.

Inoltre $C_a \subseteq B^{de}_{a+1}(\underline{0})$ $\quad C \subseteq B^{de}_2((2,0))$

Dunque $C_a \cup C = X_a$ è limitato $\forall a\in\mathbb{R}$ rispetto alla metrica euclidea.

Per il teorema di Heine-Borel X_a è dunque compatto $\forall a\in\mathbb{R}$

Inoltre $\forall a$ $C_a \simeq C \simeq S^1$ che è cpa (connesso per archi). Dunque, se $C_a \cap C \neq \emptyset$ allora X_a è cpa dunque connesso. Per questo usiamo il seguente risultato:

se $Y, Z \subseteq X$ sono sottospazi connessi tali che

$Y \cap Z \neq \phi \Rightarrow Y \cup Z$ è un sottospazio connesso.

Se invece $C \cap C_a = \emptyset$, osserviamo che

$C = g^{-1}(0) \qquad g(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 1 \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

e Data $h_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad h_a(x,y) = x^2 + y^2 - a^2$

$C_a = h_a^{-1}(0)$

Quindi C e C_a sono entrambi chiusi in $\mathbb{R}^2$

Dunque in questo caso X_a è unione disgiunta di due suoi sottospazi chiusi (C e C_a) e quindi sconnesso.

Ora osserviamo che

$$C_a \cap C = \emptyset \text{ se } |a| \in [0,1) \cup (3,+\infty)$$
$$C_a \cap C \neq \emptyset \text{ se } |a| \in [1,3]$$

b) La connessione è una proprietà topologica.

Se $a=0 \quad X_0 = \{(0,0)\} \cup C$

se $|a| \in (0,1) \cup (3,+\infty)$ X_a è unione disgiunta di due circonferenze

$\forall a$ tale che $|a| \in (0,1) \cup (3,+\infty) \quad X_a \simeq X_{1/2}$

ad esempio tramite

$\varphi : X_a \to X_{1/2}$ così definito:

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} \dfrac{(x,y)}{2|a|} & \text{se } (x,y) \in C_a \\ (x,y) & \text{se } (x,y) \in C \end{cases}$$

poiché C e C_a sono chiusi disgiunti, φ è ben definito e continuo ed è immediato costruire un'inversa continua.

Le componenti connesse di X_a sono C_a e C

(sono connessi, aperti e chiusi in X_a)

Le componenti connesse di X_0 sono $\{(0,0)\}$ e C
Dunque $X_a \not\approx X_0$ in questi casi.

→ Nel caso $|a| = 1, 3$, osservo che $X_{-1} = X_1$ $X_{-3} = X_3$
e $X_1 \approx X_3$ ad esempio tramite

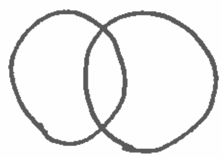
$$\psi(x,y) := \begin{cases} (3x, 3y) & \text{se } (x,y) \in C_1 \\ (-x+4, y) & \text{se } (x,y) \in C \end{cases}$$

riflessione rispetto alla retta $x=2$

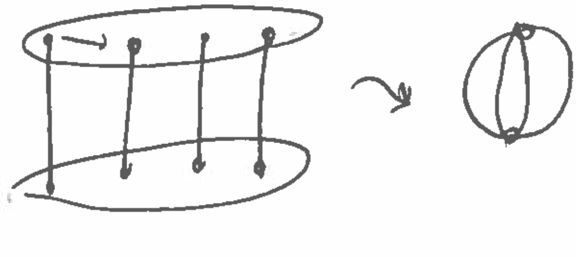
ψ è ben definita perché sull'punto di intersezione $\{(1,0)\} = C_1 \cap C$ le due funzioni coincidono. È continua perché C_1 e C sono chiusi in X_1. È facile scrivere l'inversa

$$\psi^{-1}(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right) & (x,y) \in C_3 \\ (-x+4, y) & \text{se } (x,y) \in C \end{cases}$$

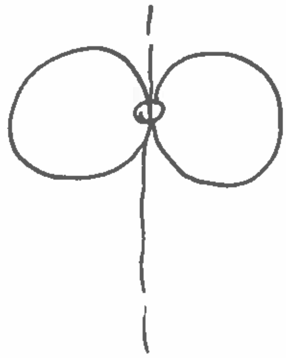
→ Nel caso $|a| \in (1,3)$ ho spazi della forma



Questi spazi sono tutti omeomorfi tra loro. Infatti sono tutti omeomorfi a 4 segmenti disgiunti in $\mathbb{R}^2$ con i gli estremi identificati come in figura:



Ora, basta controllare se questi spazi sono omeomorfi a X_1.
Perché di certo X_1 e X_a con $|a| \in (1,3)$ non sono omeomorfi a X_a con $a \in [0,1) \cup (3,+\infty]$ essendo questi ultimi sconnessi.
Osservo che se tolgo $(1,0)$ da X_1 ottengo due componenti connesse, mentre $\forall p \in X_2$ $X_2 \setminus \{p\}$ è cpa dunque connesso:



$$X_1 \setminus \{(1,0)\} = (\underbrace{X_1 \cap \{x<1\}}) \cup (\underbrace{X_1 \cap \{x>0\}})$$

aperti non vuoti

sono tutti cpa

Dunque riassumendo le classi di omeomorfismo di X_a sono le seguenti 4:

$\{X_0\}$ 

$\{X_1, X_3, X_{-1}, X_{-3}\}$ 

$\{X_a\}_{a \in (1,3)}$ 

$\{X_a\}_{a \in (0,1) \cup (3,+\infty)}$ 

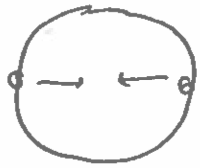
---

(5) Considero $S^1/\sim$ $\quad S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad (x,y)\sim(x',y')$

sse $\begin{cases}(x,y)=(x',y') \\ \text{oppure} \\ |x|=|x'|=1\end{cases}$

Dunque identifichiamo i punti

$(1,0)$ e $(-1,0)$ su S^1



L'idea è che otteniamo una figura a otto 8 omeomorfa a X_1 (X_3, X_{-1}, X_{-3})

Siccome sappiamo che se identifico gli estremi di un intervallo ottengo uno spazio omeomorfo a S^1, basta osservare che i due sottospazi di S^1

$A_1 = S^1 \cap \{x \leq 0\}$ e $A_2 = S^1 \cap \{x \geq 0\}$ sono rispettivamente omeomorfi ai segmenti $[-1,1]$

(tramite la proiezione sull'asse y)

e $A_1/\sim \; \simeq S^1$ $\qquad A_2/\sim \; \simeq S^1$

Mentre $A_1/\sim \; \cup \; A_2/\sim \; = S^1/\sim$

e $A_1/\sim \; \cap \; A_2/\sim \; = \{p\}$ dove p è il punto che corrisponde alla classe $\{(1,0),(-1,0)\}$

Dunque $S^1/\sim$ è omeomorfo a due circonferenze incollate in un punto, spazio che è omeomorfo a X_1 come volevamo.

3) $P_i \leftrightarrow [v_i]$ $\quad v_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\; v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\; v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\; v_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

(a) per vedere che i P_i sono in posizione generale in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ devo verificare che i P_i sono 3 a 3 non allineati:
(nel compito vi si chiede di definire in generale un insieme di punti in posizione generale — fatelo!)

$\mathrm{span}(v_0, v_1, v_2) = \mathbb{R}^3$ poichè $\det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = 1 \neq 0$

Inoltre $v_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = 2v_0 - v_1 + v_2$

Dunque, essendo v_3 combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli di v_0, v_1, v_2, vale che

$$\underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\parallel}{\mathrm{span}(v_0,v_1,v_2)}} = \mathrm{span}(v_1,v_2,v_3) = \mathrm{span}(v_0,v_2,v_3) = \mathrm{span}(v_0,v_1,v_3).$$

Sono in posizione generale.

(b) Vale che Dati due insiemi (ordinati) di 4 punti in posizione generale $\{P_0\, P_1\, P_2\, P_3\}$ $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ $\exists!$ proiettività $f: \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $f(P_i) = Q_i$ $\forall i = 0, \dots, 3$

Poichè $id_{\mathbb{P}^2}$ è una proiettività di $\mathbb{P}^2$ (che fissa tutti i punti), si tratta dell'unica proiettività di $\mathbb{P}^2$ che fissa tutti i punti.

(c) cerco una proiettività $f: \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che

$f(P_i) = [e_i]$ $\quad i = 0,1,2$ $\quad$ e $\quad f(P_3) = [e_1 + e_2 + e_3]$

(dove $\{e_0\ e_1\ e_2\}$ sono i vettori della base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$)

Devo semplicemente considerare la matrice

$$M = \left(\lambda_0 [v_0]_{\mathcal{B}} \ \lambda_1 [v_1]_{\mathcal{B}} \ \lambda_2 [v_2]_{\mathcal{B}} \right)$$

dove i λ_i sono i coefficienti di v_3 scritto come combinazione lineare di v_0, v_1, v_2.

Dunque $$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la proiettività cercata è

$$f([x_0, x_1, x_2]) = [2x_0 - x_1 + 2x_2, -x_1, x_2]$$

(d) Sappiamo che il luogo $\{P \in \mathbb{P}^2 \mid f(P) = P\}$ è l'unione dei proiettivizzati degli autospazi associati alla matrice associata ad f proiettività.

Dunque devo ~~a~~ avere

span(v_2, v_3) = autospazio associato a un certo autovalore, diciamo $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (ovviamente non è nullo)

e span(v_0) = autospazio associato a un atro autovalore che chiamo $\mu \in \mathbb{R}^*$ (con $\mu \neq \lambda$): dunque

$$\begin{cases} M v_2 = \mu v_2 \\ M v_3 = \mu v_3 \\ M v_0 = \lambda v_0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} M^1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ M^1 + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} \\ 2M^1 + M^3 = \begin{pmatrix} 2\mu \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \end{cases}$$

dunque M è della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda-\mu & 2\mu-2\lambda \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in (\mathbb{R}^*)^2 \setminus \Delta$$

In effetti, poichè M è definita a meno di multipli per uno scalare non nullo, posso prendere

$[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1 \setminus \{[1, 1]\}$

fine