

Alcuni esercizi ed esempi sulle proprietà di numerabilità, separazione e separabilità

• 2-numerabilità di $(\mathbb{R}, \tau_e)$.

Verifichiamo che la famiglia di aperti di τ_e

$$\mathcal{B} = \{ (a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{Q} \}$$

è una base per τ_e .

Dobbiamo verificare che $\forall U \in \tau_e \forall x \in U \exists B \in \mathcal{B} \text{ t.c. } x \in B \subseteq U$:

Sia $U \in \tau_e$, sia $x \in U$. Per definizione di aperto $\exists \varepsilon > 0$ t.c.

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$$

Per la densità dei razionali nei reali, $\exists a \in (x - \varepsilon, x) \cap \mathbb{Q}$ ed $\exists b \in (x, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$. Dunque $(a, b) \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$ e $(a, b) \in \mathcal{B}$, come volevamo.

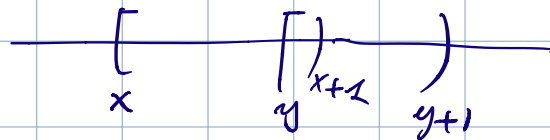
• Verifica che $(\mathbb{R}, \tau_S)$ non è 2-numerabile.

τ_S = topologia della retta di Sorgenfrey

Vogliamo verificare che non esiste una base numerabile per τ_S .

Sia $\mathcal{B}$ una base qualunque per τ_S . Per definizione $\forall x \in \mathbb{R} \exists B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$.

Ora, se $x \neq y$ allora $B_x \neq B_y$ necessariamente, perché
supponendo che $x < y$ ho che $x \in B_x$ ma $x \notin B_y \subseteq [y, y+1)$



Quindi abbiamo costruito un'applicazione iniettiva

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B} \quad \text{Poiché } \mathbb{R} \text{ non è numerabile, neanche } \mathcal{B} \text{ lo è.}$$
$$x \in \mathbb{R} \mapsto B_x$$

• Esempio di uno spazio non 1-numerabile:

Dobbiamo trovare uno spazio X ed un suo punto $x \in X$ tale che ogni sistema fondamentale di intorno di x non sia numerabile.

Prendiamo X insieme non numerabile e prendiamo su X la topologia cofinita $\mathcal{K} = \{ Y \subseteq X \mid |X \setminus Y| < +\infty \} \cup \{ \emptyset \}$.
Sia $\bar{x} \in X$ un punto qualunque.

Osserviamo che:

$$1) \quad \{ \text{intorni aperti di } \bar{x} \} = \{ \text{aperti di } \mathcal{K} \text{ che contengono } \bar{x} \} = \\ = \{ X \setminus F \mid \text{con } F \text{ finito in } X \text{ tale che } \bar{x} \notin F \}$$

2) Ovviamente questo insieme non è numerabile ed è un sistema fondamentale di intorno, ma questo non ci dice che non possa essere 1-numerabile.

Supponiamo per assurdo che esista un sistema fondamentale di intorno numerabile.

$$\mathcal{N} = \{ \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_i, \dots, i \in \mathbb{N} \}$$

$$\forall i \quad \mathcal{N}_i = X \setminus F_i \quad \text{con } |F_i| < +\infty, \bar{x} \notin F_i$$

Poiché ogni F_i è finito, l'insieme

$$N = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \subseteq X \quad \text{è un insieme numerabile.}$$

Ma X non è numerabile quindi $\exists x' \in X \setminus N$

Ora, $X \setminus \{x'\}$ è un intorno aperto di $\bar{x}$, ma

$\nexists i$ tale che $X \setminus F_i \subseteq X \setminus \{x'\}$ perché $x' \in X \setminus F_i$.

Quindi abbiamo un assurdo.

- Esempio di uno spazio di Hausdorff (T_2) che non è normale ($T_4 + T_1$).

Oss: poiché $T_2 \Rightarrow T_1$ dovrò trovare uno spazio che sia T_2 e non T_4 .

Seguo l'esempio nel Seresi 2 Cap 3 Sez 8 (leggermente modificato)

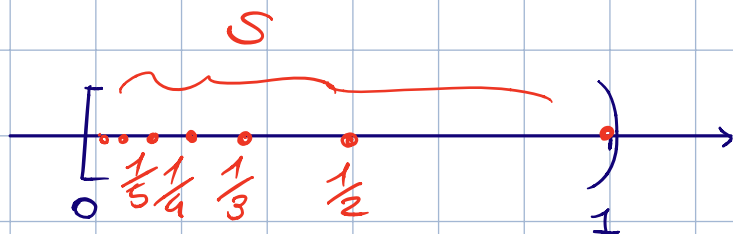
$$X = [0, 1) \quad S = \{1/n, n \in \mathbb{N}^{>2}\}$$

τ topologia meno fine su X contenente la famiglia:

$$\mathcal{A} := \{(a, b), a < b, a, b \in (0, 1)\} \text{ e}$$

$$\mathcal{B} := \{B_r, r \in (0, 1]\}$$

$$\text{dove } B_r = \{x \in X \mid x < r, x \notin S\} = [0, r) \cap (X \setminus S) = [0, r) \setminus S$$



Dunque in altre parole τ è la topologia generata dagli insiemi sopra descritti: $\tau = \tau_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$.

Osservazione - Esercizio:

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è anche una base per τ :

verifichiamo infatti che vale il lemma della base:

$$i) \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}\} = X \text{ ovvio.}$$

$$ii) (a, b) \cap (c, d) = \begin{cases} (\max\{a, c\}, \min\{b, d\}) & \text{se } \max\{a, c\} < \min\{b, d\} \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathcal{A}.$$

$$(a, b) \cap B_r = \begin{cases} (a, 1/n) \cup (1/n, 1/(n-1)) \cup \dots \cup (1/m, r) & \text{se } r > a \\ \emptyset & \text{se } r < a \end{cases}$$

per opportuni $N, m \in \mathbb{N}^{>2}$

$$B_r \cap B_s = B_{\min\{r,s\}} \in \mathcal{B}$$

Quindi la proprietà (ii) $(\forall A, B \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \quad \forall x \in A \cap B \quad \exists C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \text{ tale che } x \in C \subseteq A \cap B)$ è facilmente verificata.

→ (X, τ) è T_2 : presi $x, y \in (0, 1]$ $\exists U, V \in \tau$ in $(0, 1]$ tali che $x \neq y$, non è limitativo supporre che $x < y$.

Se $x > 0$, allora dato $\varepsilon = \min\left\{x, \frac{y-x}{2}\right\} > 0$
 $U = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathcal{A}$, $V = (y-\varepsilon, 1) \in \mathcal{A}$
 e $U \cap V = \emptyset$ perché $x+\varepsilon \leq y-\varepsilon$

Se $x=0$, basta prendere $r < y$

e ho che $B_r \ni x$ $\left. \begin{array}{l} (r, 1) \ni y \end{array} \right\}$ e $B_r \cap (r, 1) = \emptyset$ OK

→ Ora verifichiamo che (X, τ) non è T_4 .

Considero $S \subseteq X$

$X \setminus S = B_1$, quindi S è chiuso.

Quanto $0 \notin S$

Mostriamo che non esistono $U, V \in \tau$

tali che $0 \in U, S \subseteq V$ e $U \cap V \neq \emptyset$.

Se tali U, V esistessero, avrei che, poiché $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è una base per (X, τ) e $0 \in U$

$\exists r > 0$ t.c. $B_r \subseteq U$.

Sia ora $x \in [0, 1) \cap S$ (ovviamente un tale $x = \frac{1}{N}$ esiste)

Poiché $x \notin B_r$ per ogni $r \in (0, 1]$ e $x \in S \quad \exists (a, b) \in \mathcal{A}$ tale che

$x \in (a, b) \subseteq V$. Ma $(a, b) \cap B_r \neq \emptyset$, ad esempio $(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N})$ ci è contenuto.

OSS: Sappiamo dalla teoria che uno spazio X metrizzabile e separabile è 2-numerabile. Infatti, se prendo di metrica che induce la topologia, $E \subseteq X$ numerabile denso, abbiamo verificato che l'insieme

$$\mathcal{E} := \{ B_{1/n}(e), e \in E \}$$

è numerabile e denso.

Si potrebbe essere indotti ottimisticamente a pensare che valga l'implicazione più forte

1-numerabile + separabile $\Rightarrow$ 2-numerabile.

Questa implicazione è falsa: controesempio:

$(\mathbb{R}, \tau_S)$ la retta di Sorgenfrey, infatti, è 1-numerabile e separabile, ma non è 2-numerabile. visto sopra

Verifichiamo che

$(\mathbb{R}, \tau_S)$ è 1-numerabile: sia $x \in \mathbb{R}$ qualunque.

la famiglia $\{ [x, x + 1/n), n \in \mathbb{N}^+ \}$ è un sistema fondamentale di intorno di x numerabile.

Infatti se $A \in \tau_S$ intorno aperto di x : $\exists a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tali che $x \in [a, b) \subseteq A$.

Allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che $x \in [x, x + \varepsilon) \subseteq [a, b) \subseteq A$

ed. $\exists N \in \mathbb{N}^+$ tale che $\frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow [x, x + \frac{1}{N}) \subseteq A$.

$(\mathbb{R}, \tau_S)$ è separabile: infatti, $\mathbb{Q}$ è denso in $(\mathbb{R}, \tau_S)$:

Basta verificare che $\forall$ elemento non vuoto $[a, b)$ della base per τ_S , $[a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, che ovviamente è vero.

OSS: sappiamo che dato X spazio topologico $\aleph_1$ -numerabile,
dato $S \subseteq X$, $x \in \overline{S}$ se e solo se $\exists$ successione a
valori in S che ha x come limite.

L'implicazione $\boxed{\Leftarrow}$ vale in qualunque spazio topologico:

★ Se $\exists$ successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$,
allora $\bar{x} \in \overline{S}$.

Facciamo un esempio che mostra che l'implicazione opposta

$\boxed{\Rightarrow}$ non vale senza l'ipotesi di $\aleph_1$ -numerabilità.

Facciamo un esempio di uno spazio topologico X e di un
suo sottospatto S e di un $\bar{x} \in \overline{S}$ tale che non esiste
una sequenza a valori in S che tende a $\bar{x}$.

Sia X un insieme non numerabile (ad esempio $X = \mathbb{R}$)

sva $\tau := \{X \setminus C \mid C \subseteq X, C \text{ numerabile}\} \cup \{\emptyset\}$

Verificate che τ è una topologia su X , che si chiama
topologia co numerabile, e che (X, τ) non è $\aleph_1$ -numerabile.

Sia $\bar{x} \in X$, prendo $S = X \setminus \{\bar{x}\}$ (ad esempio $\bar{x} = 0 \in \mathbb{R}$)

$\overline{S} =$ il più piccolo chiuso che contiene $S = X$

Quindi $\bar{x} \in \overline{S}$

Sia x_n una successione di elementi di S

Considero $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} =: E \subseteq X$

E è numerabile in X , quindi è chiuso rispetto a τ .

Quindi $\overline{E} = E$ in (X, τ) . Allora, se $x_n \rightarrow y$, ho che

$y \in \overline{E}$ per ★, ma $\bar{x} \notin \overline{E}$, quindi abbiamo finito.