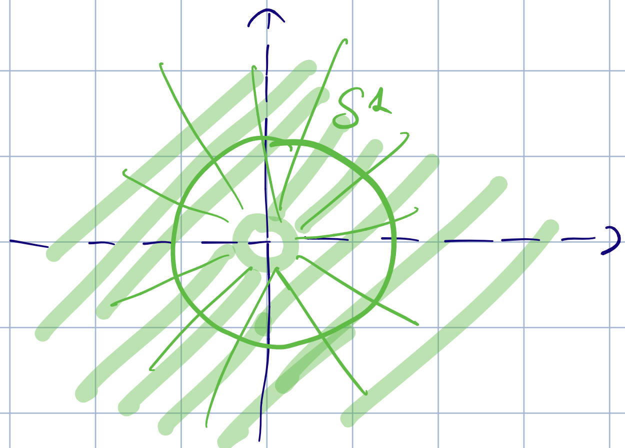
5. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}_+$.

Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \sim S^1 \times \mathbb{R}^{>0}$



Idea: ogni vettore $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ lo posso vedere come

$$\underline{x} = \underbrace{\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}}_{\in S^1} \cdot \underbrace{\|\underline{x}\|}_{\in \mathbb{R}^{>0}}$$

provo ad usare questa idea per definire un omeomorfismo

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}^{>0}$$
$$\underline{x} \longmapsto \left(\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}, \|\underline{x}\| \right)$$

è ben definita e continua.

Proviamo a costruire un inverso:

$$\psi : S^1 \times \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$$
$$(\underline{y}, t) \longmapsto \underline{y}\, t$$

chiaramente è continua.

$$\psi \circ \varphi (\underline{x}) = \psi\left(\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}, \|\underline{x}\| \right) = \|\underline{x}\| \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} = \underline{x}$$

$$\psi \circ \varphi = id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}}$$

$$\varphi \circ \psi (\underline{y}, t) = \varphi(\underline{y}\, t) = \left(\frac{\underline{y}\, t}{\|\underline{y}\, t\|}, \|\underline{y}\, t\| \right) \overset{(\|\underline{y}\|=1 \text{ e } t>0)}{=}$$

$$= \left(\frac{\underline{y}\, t}{t}, \|\underline{y}\| |t| \right) = (\underline{y}, t) \Rightarrow \varphi \circ \psi = id_{S^1 \times \mathbb{R}^{>0}}$$

Oss:

Nello stesso modo si può facilmente dimostrare che

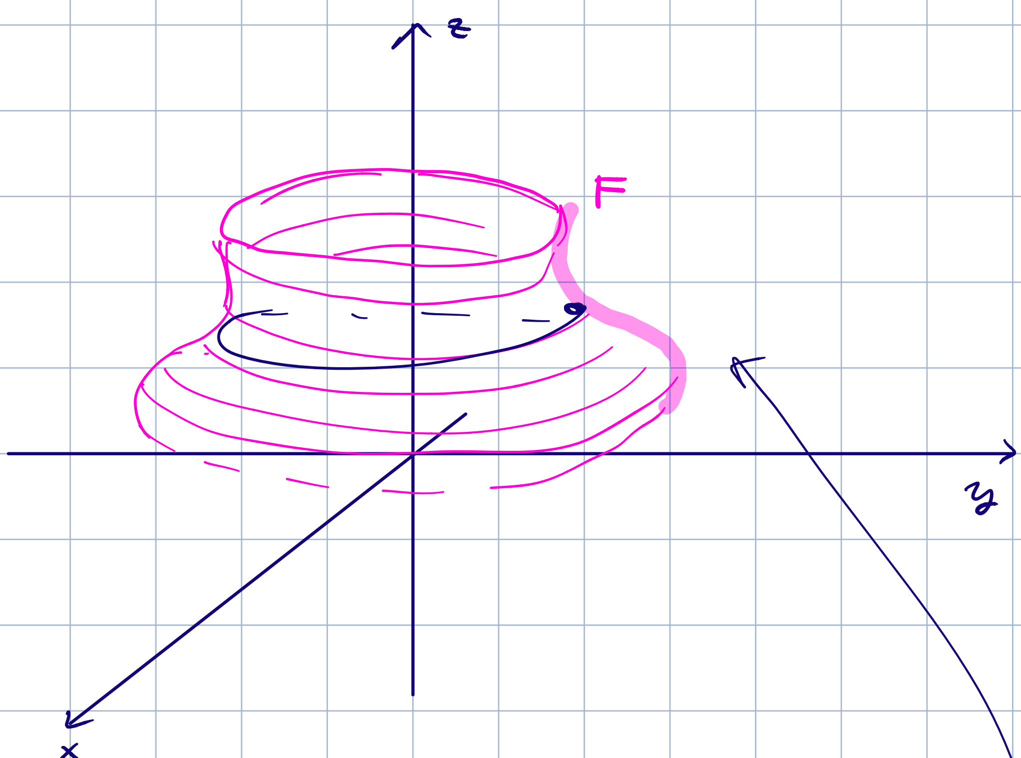
$$\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \text{ è omeomorfo a } S^n \times \mathbb{R}^{>0}$$

Figure di Rotazione in $\mathbb{R}^3$.

10. Sia $F \subseteq \{x > 0, y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ un insieme (che dotiamo della topologia di sottospazio indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^3$). Sia $R_F \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio che ottengo ruotando F intorno all'asse z cioè:

$$R_F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (0, \sqrt{x^2 + y^2}, z) \in F\}.$$

Dimostrare che R_F è omeomorfo a $F \times S^1$.



$R_F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tc $(0, \sqrt{x^2+y^2}, z) \in F \} =$

Se taglio R_F con un piano $z = a$, ottengo

$R_F \cap \{z=a\} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (0, \sqrt{x^2+y^2}, z) \in F \}$ cioè

$\forall\ (0, u, a) \in F$ ho

$R_F \cap \{z = a\} = \{ (x, y, a) \mid x^2 + y^2 = u^2 \}$

Costruisco un omeomorfismo con $F \times S^1$ usando l'intuizione geometrica:

Sia $(x, y, z) \in R_F$

considero $\varphi(x, y, z) := \left(\left(0, \sqrt{x^2+y^2}, z\right), \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right)$

$$\begin{array}{c} \cap \\ F \times S^1 \end{array}$$

È chiaro che φ è continua.

Costruiamo l'inversa:

$$\psi : F \times S^1 \longrightarrow R_F$$

$$((0, u, v), (s, t)) \longmapsto (us, ut, v) \quad \left(\text{chiaro che è continua} \right)$$

Ora vediamo che ψ è l'inversa di φ

occorre verificare che $\psi \circ \varphi = Id_{R_F}$ e che $\varphi \circ \psi = Id_{F \times S^1}$

$$\psi \circ \varphi (x, y, z) = \psi\left(\left(0, \sqrt{x^2+y^2}, z\right), \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right) =$$

$= (x, y, z)$ <u>OK</u>

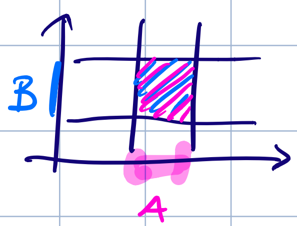
$$\varphi \circ \psi ((0, u, v), (s, t)) = \varphi(us, ut, v) =$$

$= (0, \underset{\substack{\parallel \\ u}}{\sqrt{u^2(s^2+t^2)}}, v)$ <u>OK</u>

<u>Quindi</u> fare la rotazione intorno ad un asse di una figura contenuta in un semipiano nel fascio di piani per l'asse equivale topologicamente a fare il prodotto per S^1

8. (Manetti 3.51) Siano X, Y spazi topologici, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sottoinsiemi. Dimostrare che $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare se A e B sono chiusi allora $A \times B$ è chiuso nel prodotto.

Osserviamo che $\overline{A} \times \overline{B}$ è un chiuso nel prodotto $X \times Y$ perché abbiamo $(X \times Y) \setminus (\overline{A} \times \overline{B}) = \{(x,y) \in X \times Y \mid \text{non}(x \in \overline{A} \text{ e } y \in \overline{B})\} =$



$= \{(x,y) \in X \times Y \mid x \notin \overline{A} \text{ oppure } y \notin \overline{B}\} =$

$= ((X \setminus \overline{A}) \times Y) \cup (X \times (\overline{B} \setminus Y)) \in \tau_{X \times Y}$

Inoltre, siccome $A \subseteq \overline{A}$ e $B \subseteq \overline{B}$, vale che $A \times B \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$.

Quindi $\overline{A \times B} \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$ per la proprietà della chiusura in $X \times Y$

D'altra parte $\forall\, a \in A$ $\quad \overline{\{a\} \times B} = \{a\} \times \overline{B}$

(perchè $\{a\} \times Y$ è omeomorfo a Y tramite q, la proiezione sul secondo fattore)

e $\overline{A \times B}$ è un chiuso in $X \times Y$ che contiene $\{a\} \times B$,

allora $\{a\} \times \overline{B} \subseteq \overline{A \times B}$

Ora, per ogni $b \in \overline{B}$ $\quad \overline{A} \times \{b\} = \overline{A \times \{b\}}$ è contenuto, per la stessa ragione, in $\overline{A \times B}$, quindi in tutto

$\overline{A} \times \overline{B} \subseteq \overline{A \times B}$.

9. Sia $Y = \{x, y\}$ un insieme con due elementi. Fare un esempio, se esiste, di una topologia sull'insieme $Y \times Y$ che non sia una topologia prodotto indotta da una topologia su Y.

Esiste! Ecco qui:

Ho $Y \times Y = \{(x,x), (x,y), (y,x), (y,y)\}$

Supponiamo che τ sia una topologia indotta da due topologie su Y: τ_1, τ_2 topologie su Y

$(Y^2, \tau) = (Y, \tau_1) \times (Y, \tau_2)$.

$$\begin{tikzcd} & Y^2 \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ Y & & Y \end{tikzcd}$$

proiezioni sui due fattori

Allora $\forall\ U_1 \in \tau_1$ $\quad p^{-1}(U_1) = U_1 \times Y \in \tau$

$\forall\ U_2 \in \tau_2$ $\quad q^{-1}(U_2) = Y \times U_2 \in \tau$

Prendo una topologia di questa forma:

$\mathcal{S} := \{\{(x,x)\}, Y^2, \emptyset\}$

Se per assurdo $\mathcal{S}$ fosse data da un prodotto, avrei (poiché le proiezioni sono aperte)

$p((x,x)) = x \in \tau_1$

Allora dovrei avere che l'aperto saturo

$p^{-1}(x) = \{x\} \times Y = \{(x,x), (x,y)\}$ dovrebbe appartenere a $\mathcal{S}$, ma non è così.

Ultimo esercizio dal foglio 3:

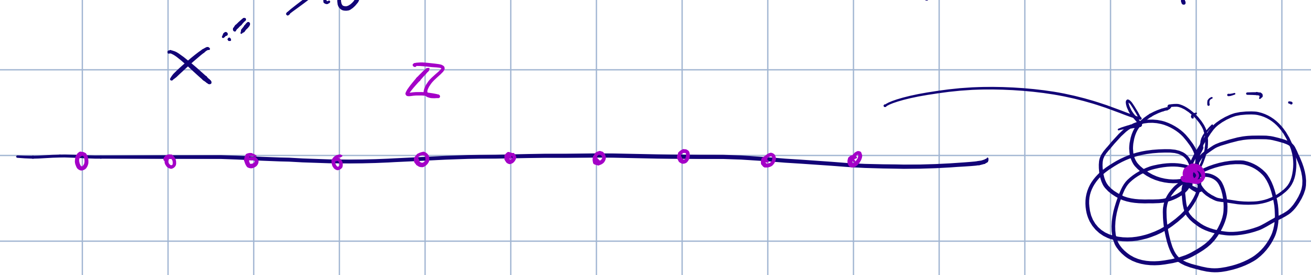
ESERCIZIO 6.1 del Manetti: esempio di uno spazio quoziente di $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ che non soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Quindi la 1 numerabilità <u>NON</u> passa al quoziente (e nemmeno la 2-numerabilità, perché $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ è 2-numerabile e 2-numerabile $\Rightarrow$ 1-numerabile)

Considero la seguente relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$:

$x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Z}$.

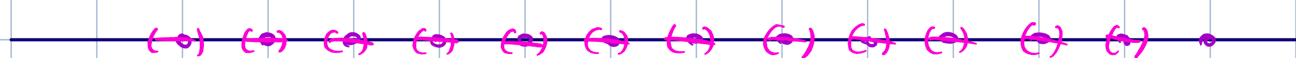
Considero $\mathbb{R}/_\sim$. L'idea è che identifico tutti i punti di $\mathbb{Z}$



ottengo una specie di "bouquet infinito" di S^1

Ora, se prendo un intorno aperto di $p = [\mathbb{Z}]$ in X questo è immagine di un aperto saturo che contiene $\mathbb{Z}$

Quindi se prendo ad esempio degli intervallini piccoli (di ampiezza $< \frac{1}{2}$) intorno a ciascun $n \in \mathbb{Z}$, l'immagine è un intorno di p.



Supponiamo per assurdo che esista un sistema fondamentale di intorni di p numerabile

$\mathcal{B}(p) = \{ U_n , n \in \mathbb{Z} \}$. Vogliamo trovare un assurdo.

prendiamo $\mathbb{Z}$ come insieme di indici che ci viene comodo

Costruiamo un intorno di p che non sia contenuto in nessuno degli $\mathcal{U}_n$ (contro l'assunzione che $\mathcal{B}(x)$ sia un sistema fondamentale di intorni)

Sia $\pi : \mathbb{R} \to X$ l'applicazione quoziente.

Per ogni $n \in$ ho che $\pi^{-1}(\mathcal{U}_n)$ è un aperto (saturo) di $\mathbb{R}$ che contiene $\{n\}$ (contiene tutto $\mathbb{Z}$!). Quindi $\exists\ r_n > 0$ (e prendiamo $r_n < \frac{1}{4}$) t.c.

$$(n - r_n, n + r_n) \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{U}_n).$$

Prendiamo allora prendiamo allora $\varepsilon_n > 0$ tale che $\varepsilon_n < r_n$: allora

$$(n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n) \subsetneq (n - r_n, n + r_n) \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{U}_n)$$

Ora prendiamo

$$\mathcal{V} := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n)$$

$\mathcal{V}$ è un aperto saturo di $\mathbb{R}$ che contiene $\mathbb{Z}$.

Quindi $\pi(\mathcal{V})$ è un intorno aperto di P.

Ma per come l'abbiamo definito

$\pi^{-1}(\mathcal{U}_n) \not\subseteq \mathcal{V}$ per nessun $n \in \mathbb{Z}$

ovvero $\mathcal{U}_n \not\subseteq \pi(\mathcal{V})$, come volevamo.

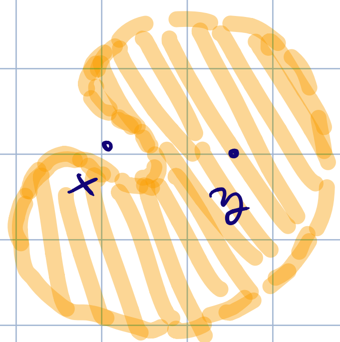
16. Dimostrare che uno spazio topologico X è T0 se e solo se punti distinti hanno chiusure distinte.

La definizione di X T0 è:

$\forall x, y \in X$ con $x \neq y$, $\exists\, \mathcal{U} \in \tau_X$ tale che $x \in \mathcal{U}$, $y \notin \mathcal{U}$

oppure (vel)

$\exists\, \mathcal{V} \in \tau_X$ tale che $y \in \mathcal{V}$ e $x \notin \mathcal{V}$



Chiamo la proprietà:

(★) $\forall x, y$ con $x \neq y$ $\overline{\{x\}}$ e $\overline{\{y\}}$ sono distinti.

vediamo che T0 $\Rightarrow$ (★)

Siano $x, y \in X$ punti distinti.

prendo (per fissare le idee) $\mathcal{U} \in \tau_X$ tc $x \in \mathcal{U}$ e $y \notin \mathcal{U}$

Allora $X \setminus \mathcal{U}$ è un chiuso che contiene y e non x

quindi $\overline{\{y\}} \subseteq X \setminus \mathcal{U}$ per cui per forza

$\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ quindi vale (★).

Viceversa, supponiamo (★) e verifichiamo T0.

Abbiamo che $\overline{\{x\}}$ e $\overline{\{y\}}$ sono due sottoinsiemi distinti di X. Verifichiamo che deve valere

$y \notin \overline{\{x\}}$ oppure $x \in \overline{\{y\}}$.

Se fosse per assurdo $y \in \overline{\{x\}}$ $x \in \overline{\{y\}}$, allora avrei $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$ e $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ (per definizione di chiusura), quindi avrei $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, assurdo.