

17) Sia  $f: X \rightarrow Y$  suriettiva e chiusa tale che  
 $\forall y \in Y \quad f^{-1}(y)$  sia un sottospazio compatto di  $X$   
 $Y$  sia compatto.

Dimostrare che  $X$  è compatto.

Lemma Sia  $f$  continua chiusa e suriettiva. Sia  $y \in Y$

Vale che se  $U \subseteq X$  è aperto tale che  $f^{-1}(y) \subseteq U$

allora  $\exists W \subseteq Y$  intorno aperto di  $y$

tal che  $f^{-1}(W) \subseteq U$ . (è una generalizzazione del lemma del Tubo nella dimostrazione di Tychonoff)

dim:

osserviamo che  $f^{-1}(W) \subseteq U$

equivale a  $X \setminus U \subseteq Y \setminus f^{-1}(W)$

ovvero  $f(X \setminus U) \cap W = \emptyset$

Sia ora  $U \supseteq f^{-1}(y)$   $X \setminus U$  è chiuso in  $X$ )

Quindi  $f(X \setminus U)$  è chiuso in  $Y$  tale che  
 $y \notin f(X \setminus U)$

Diunque  $\exists W$  intorno aperto di  $y$  tale che

$y \in W \subseteq Y \setminus f(X \setminus U)$

ovvero  $W \cap f(X \setminus U) = \emptyset$  come volevamo.

Ora dimostriamo la affermazione sopra.

La dimostrazione si calca quella di Tychonoff:

Sia  $A$  ricoprimento aperto di  $X$

$\forall y \in Y$   $A$  è ricoprimento aperto di  $f^{-1}(y)$

$\Rightarrow$  per la compattezza di  $f^{-1}(y)$

$\exists$  insieme finito  $F(y)$  ed  $\exists$   
 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in F(y)} \subseteq A$  tali che

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in F(y)}$  è ricoprimento aperto di  $f^{-1}(y)$ .

$\forall y \in Y$

$\bigcup_{\alpha \in F(y)} A_\alpha =: U$  è un aperto che contiene  $f^{-1}(y)$

quindi per il lemma precedente

$\exists W_y \subseteq Y$  aperto tale

$y \in W_y$  e  $f^{-1}(W_y) \subseteq \bigcup_{\alpha \in F(y)} A_\alpha$

$\{W_y\}_{y \in Y}$  è un ricoprimento aperto di  $Y$ .

Ora uso la compattezza di  $Y$ :

$\exists y_1, \dots, y_k \in Y$  tali che

$\{W_{y_1}, \dots, W_{y_k}\}$  è un ricoprimento di  $Y$ .

Ora,

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in F(y_1) \cup \dots \cup F(y_k)} \subseteq A$

è per costruzione un sotto ricoprimento

finito di  $A$

□

Es: prova te a fare lo stesso esercizio con l'ipotesi  
 $f$  chiusa anziché  $f$  aperta.

18) Se  $X$  e  $Y$  sono compatti  
e  $Y$  è  $T_2$

Allora  $q: X \times Y \rightarrow Y$  è chiusa.

Basta usare Tychonoff che ci dice che  
 $X \times Y$  è compatto, che  $q$  è continua  
da  $X \times Y$  compatto a  $Y$   $T_2 \Rightarrow$   
 $q$  è chiusa.